

Úvod

Cramerovo pravidlo je metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic. Využívá determinantů a proto je jejich znalost nutná před dalším pokračováním.

I Cramerovo pravidlo - dvě rovnice

Máme-li zadanou dvojici lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y = e_1$$

$$a_2x + b_2y = e_2$$

pak x a y můžeme nalézt jako

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 \\ e_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Tématický příklad. Vyřešte soustavu rovnic

$$3x + 4y = -14$$

$$-2x - 3y = 11$$

Řešení. Použitím Cramerova pravidla můžeme zapsat řešení jako poměr dvou determinantů.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & 4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -14 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-1} = -5.$$

Řešení soustavy rovnice je tedy $x = 2$, $y = -5$.

Užitečná poznámka. Přestože je Cramerovo pravidlo vhodným nástrojem pro řešení soustav rovnic, i tak má svá omezení. Je vhodné pouze u těch soustav, kde je stejný počet rovnic a neznámých. Dále je potřeba, aby determinant matice soustavy bez pravé strany byla regulární.

Nový pojem 1: Regulární matice

Regulární matice je čtvercová matice, která má determinant různý od nuly. Pokud má matice determinant roven nule, pak se nazývá singulární.

II Cramerovo pravidlo - tři rovnice

Pro případ třech rovnic o třech neznámých: pokud

$$a_1 + b_1y + c_1z = e_1$$

$$a_2 + b_2y + c_2z = e_2$$

$$a_3 + b_3y + c_3z = e_3$$

pak x, y a z můžeme nalézt jako

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Cvičení. Užitím Cramerova pravidla vyřešte následující soustavy rovnic.

1.

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 15 \\ -2x + 5y &= -16 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 17 \\ 3x + 2y + z &= 11 \\ x - 5y + z &= -5 \end{aligned}$$

Odpovědi. a) $x = 3, y = -2$. b) $x = 1, y = 2, z = 4$.