Derivace

Úvod

Existují dvě pravidla známá jako pravidla linearity, které spolu s tabulkou derivací umožní derivovat širší škálu funkcí.

Základní značení

Než si představíme pravidla linearity, musíme mít jasno v používaném značení $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Pokud máme funkci $y(x)$ a hledáme její derivaci podle proměnné x používáme zápis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, případně lze použít $y'(x)$.

Jako ukázku můžeme uvést:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2 \qquad \text{nebo} \qquad y = \sin x \text{ pak } y' = \cos(x)$$

Derivování funkce násobené konstantou

Představme si, že k je libovolné reálné číslo a f je libovolná spojitá hladká (nemá hroty) funkce.

Důležité tvrzení: Derivace funkce násobené konstantou

Pro libovolné číslo k a funkci f proměnné x takové ,že funkci umíme derivovat platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kf) = k \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

To znamená, že libovolnou konstantu, kterou je násobená derivovaná funkce, můžeme vytknout před derivovanou funkci.

Příklad. Zderivuje následující funkce

1 $y = 5x^2$

2 $y = \frac{1}{2}\sin x$

3 $y = \pi \mathrm{e}^{2x}$

4 $y = \sqrt{2}\ln x$

Řešení. Při řešení vždy vytkneme konstantu a pak derivujeme.

1 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(5x^2) = 5 \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^2) = 5 \cdot 2x = 10x.$

2 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\sin(x)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\sin(x)\right) = \frac{1}{2}\cos(x).$

3 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\pi \mathrm{e}^x) = \pi \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \pi \mathrm{e}^x.$

4 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\sqrt{2} \cdot \ln x) = \sqrt{2} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{x}.$

Derivace součtu nebo rozdílu funkcí

Následující důležité tvrzení ukazuje jak derivujeme, dvě funkce v součtovém tvaru.

Důležité tvrzení: Linearita derivace

Pro libovolné funkce f a g proměnné x takové ,že každou funkci umíme derivovat platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f-g)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Tímto myslíme, že součet dvou funkcí derivujeme tak, že každou funkci zderivujeme odděleně. Výsledek pak zapíšeme ve tvaru součtu. Úplně stejným způsobem derivujeme rozdíl funkcí.

Tématický příklad. Najdi derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, jestliže $y = x^2 + x$.

Řešení. Zapíšeme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+x)$, pak tento součet budeme derivovat odděleně.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=2x+1. \tag{1}$$

Tématický příklad. Najdi derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, jestliže $y = \mathrm{e}^x - x^6$.

Řešení. Zapíšeme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x-x^6)$, pak tento rozdíl budeme derivovat odděleně.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x-x^6)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^6)=\mathrm{e}^x-6x^5. \tag{2}$$

Cvičení

1 $y = \mathrm{e}^x + 3x^4$

2 $y = x^2 - \mathrm{e}^{-x}$

3 $y = 3x^2 + 7x$

4 $y = -45687621$

5 $y = 8\mathrm{e}^x - x^3 + 2x$

Výsledky

1) $y' = \mathrm{e}^x + 12x^3$, 2) $y' = 2x + \mathrm{e}^{-x}$ 3) $y' = 6x + 7$ 4) $y' = 0$ 5) $y' = 8\mathrm{e}^x - 3x^2 + 2$