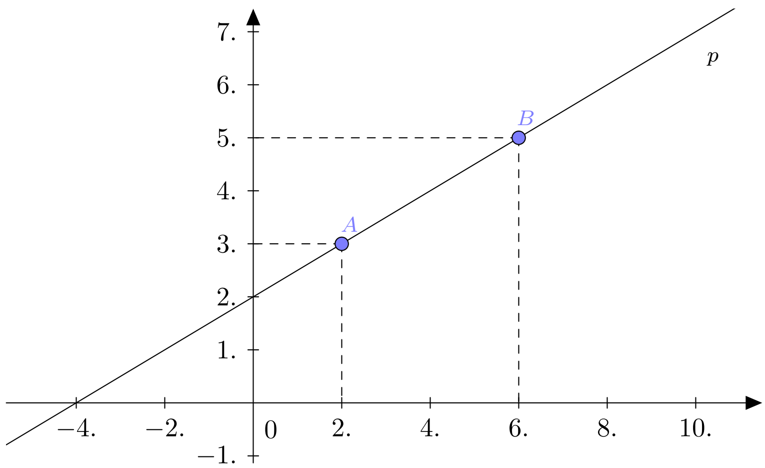
Princip derivace

V mnoha materiálech (především ve fyzice, ale i v ekonomii) se dočtete, že derivace je směrnice tečny. Tento leták Vám pomůže pochopit geometrickou interpretaci derivace.

Směrnice

Pokud mluvíme v matematice o tečně, máme na mysli přímku $y = kx + q$, kde právě konstantu k nazýváme směrnicí. Toto k určuje sklon přímky, tedy udává informaci o tom, jak přímka strmě roste nebo naopak jak strmě klesá.

Tématický příklad. Určete směrnici k a následně rovnici přímky p na obrázku níže.



Řešení. Směrnici obecně vypočítáme tak, že v libovolných bodech x_0 a x_1 určíme funkční hodnotu $f(x_0)$ a $f(x_1)$, pak

Nový pojem: Směrnice sečny

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1}$$

Tedy v tomto případě použijeme body A a B. Jestliže $x_0 = 2$ a $x_1 = 6$, pak funkční hodnoty $f(x_0) = 3$ a $f(x_1) = 5$. Potom směrnice k přímky p je daná vztahem

$$k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Jestliže dosadíme směrnici do rovnice přímky, získáme tvar $y = \frac{1}{2}x + q$. Dále určíme hodnotu q. Jestliže přímka p prochází body $A = [2,3]$ a $B = [6,5]$, pak musí platit

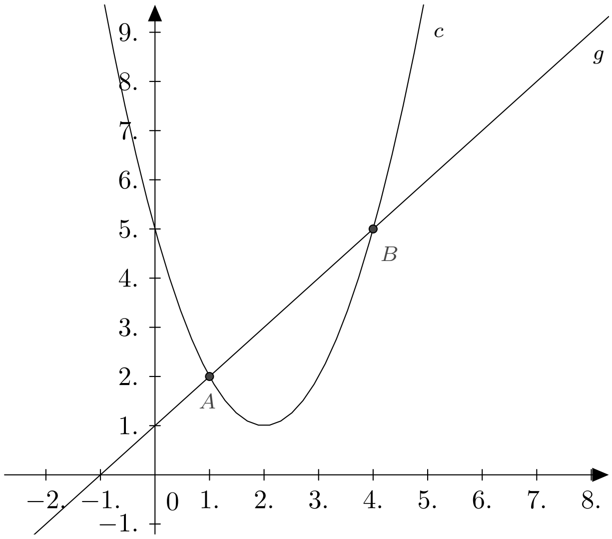
$$3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + q, \qquad 5 = \frac{1}{2} \cdot 6 + q.$$

Obě rovnosti jsou splněny právě tehdy, když $q = 2$. Potom přímka p je daná předpisem

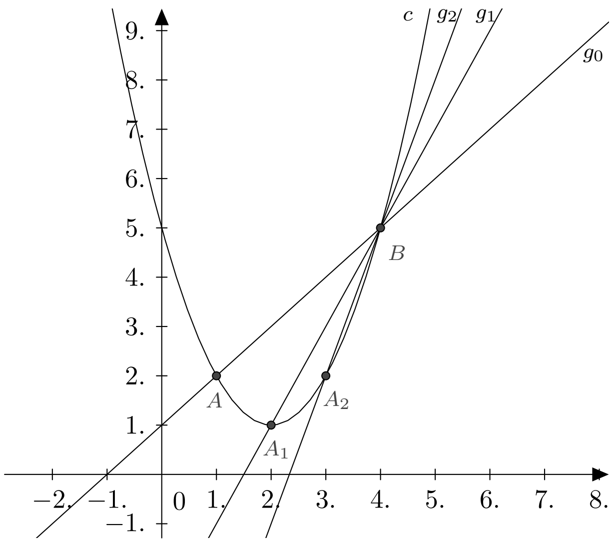
$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Derivace jako limita

Budeme-li hledat směrnici tečny, začneme tím, co již umíme a to je určit směrnici sečny. Nyní již každý dokáže určit směrnici k sečny g, která protíná parabolu c v bodech $A = [1, 2]$ a $B = [4, 5]$ na obrázku níže. Je tedy zřejmé, že $k = \frac{5-2}{4-1} = 1$.



Nyní si vysvětlíme, jak budeme hledat směrnici tečny v bodě. Jestliže budeme chtít najít směrnici tečny (případně rovnici tečny) v daném bodě B, pak začneme posouvat bod A po parabole c (křivce) k bodu B.



Z prvního příkladu už víme, jak určíme směrnici, dále víme, že

$$\text{sečna } g_0 \text{ má směrnici } k_0 = \frac{5-2}{4-1} = 1, \tag{2}$$

$$\text{sečna } g_1 \text{ má směrnici } k_1 = \frac{5-1}{4-2} = 2, \tag{3}$$

$$\text{sečna } g_2 \text{ má směrnici } k_2 = \frac{5-2}{4-3} = 3. \tag{4}$$

Když se budeme bodem A přibližovat ještě více bodu B, pak zjistíme, že směrnice sečny která se přibližuje tečně má hodnotu $3,9$. Vskutku,

$$\text{sečna blízká tečně má směrnici } k_{st} = \frac{5-4,61}{4-3,9} = 3,9. \tag{5}$$

V případě, že chceme určit tečnu, a tedy bod A splyne s bodem B. Narazíme na problém, protože směrnici k_t tečny g_t nemůžeme takto určit, protože

$$k_t = \frac{5-5}{4-4} = \frac{0}{0}. \tag{6}$$

Nula lomeno nulou je neurčitý výraz a neumíme rozhodnout, jakou hodnotu směrnice tečny má.

Jenže matematika si umí v takovémto případě pomoci a směrnici tečny vyjádřit jako limitu. Pak rovnost (1) zapíšeme ve tvaru

Nový pojem: Směrnice tečny

$$k = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{7}$$

Tématický příklad. Najděte rovnici tečny paraboly $y = x^2 - 4x + 5$ v bodě $B = [4, 5]$.

Řešení. Nejprve vypočítáme směrnici obecně, k tomu použijeme předchozí vzoreček (7). Když dosadíme rovnici paraboly to vzorečku (7), získáme

$$k = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - 4x_1 + 5 - (x_0^2 - 4x_0 + 5)}{x_1 - x_0}.$$

V dalším kroku začneme počítat limitu

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - 4x_1 + 5 - (x_0^2 - 4x_0 + 5)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - 4x_1 + 5 - x_0^2 + 4x_0 - 5}{x_1 - x_0} = \\ &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - 4x_1 - x_0^2 + 4x_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{-4(x_1 - x_0) + x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \\ &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{-4(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0 - 4)}{x_1 - x_0} = 2x_0 - 4 \end{aligned}$$

Podařilo se nám obecně vyjádřit směrnici tečny

$$k = 2x - 4. \tag{8}$$

Teď pro libovolné x z definičního oboru funkce můžeme kdekoli na parabole určit směrnici. Protože ze zadání máme určit směrnici v bodě $B = [4, 5]$ dosadíme do rovnosti (8) za x hodnotu 4, tedy

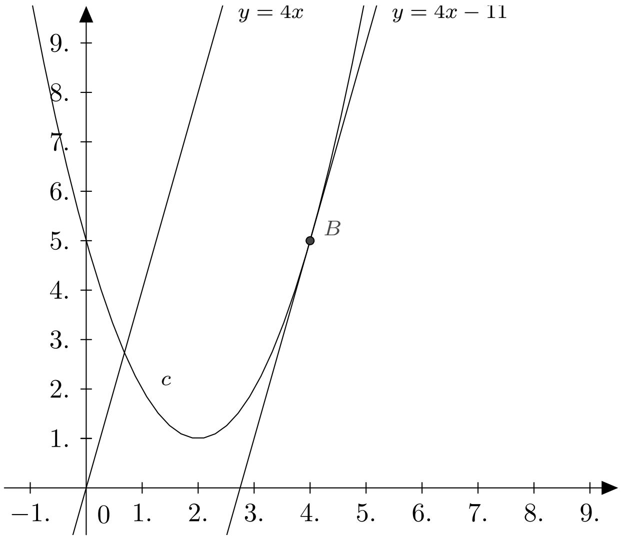
$$k = 2 \cdot 4 - 4 = 4.$$

Ovšem v zadání bylo, že máme nalézt rovnici tečny a tečna není nic jiného než přímka, tedy rovnice tečny je

$$y = 4x - 11.$$

Zůstává ovšem otázka, **kde se vzalo to číslo** 11? To je přeci jednoduché, derivace je směrnice tečny (tedy sklon přímky). Jenomže my přece chceme, aby tečna procházela bodem $B = [4, 5]$ a tak musíme přímku posunout. Tedy tečna prochází bodem $B = [4, 5]$ právě tehdy, když je splněna rovnost $5 = 4 \cdot 4 + q$. Je jednoduché určit, že tato rovnost je splněna pro $q = -11$.

Pro ucelenou představu reprezentujeme výsledek následujícím obrázkem.



Užitečná poznámka. Protože by bylo náročné derivovat přímo z definice (tím myslíme vzoreček (7)), existují pravidla pro derivování přehledně formulovaná v tabulce.

Cvičení. Sejným postupem nalezněte směrnici tečny tedy derivaci k funkci $y = \sin x$.

Nápověda: $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$