Tipy pro integrování

Tento leták je vytvořen, aby pomáhal vhodně zvolit jednu z metod pro intergování, případně doporučil vhodnou substituci. Před studiem tohoto letáku je nutné, aby čtenář ovládal rozklad na parciální zlomky.

Metoda per partes

Metodu per partes je vhodné použít především pro následující typy integrálů. Předpokládejme, že $Q(x)$ je polynom (zahrnující i konstantu), potom

$$\left.\begin{array}{l} \int\ Q(x)\ln x\ dx \\ \int\ Q(x)\arcsin x\ dx \\ \int\ Q(x)\mathrm{arctg}\, x\ dx \end{array}\right\} \quad \text{položme } u = \left\{\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \quad (u' \text{ je rac. příp. irac. fce.}) \\ \mathrm{arctg}\, x \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \int\ Q(x)\sin x\ dx \\ \int\ Q(x)\cos x\ dx \\ \int\ Q(x)a^x\ dx \end{array}\right\} \quad \text{položme } u = Q(x) \qquad \text{opakujeme tak dlouho, až se } Q(x) = c$$

Substituce

Pomocí vhodně zvolené substituce z tabulky převedeme integrál racionálně lomené funkce $R(\cdot)$ na integrál z racionálně lomené funkce $R(t)$. Racionální lomené funkce pro integraci rozkládáme na parciální zlomky.

$\int R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \cdots, x^{\frac{1}{k_n}}\right)\ dx$	$t = x^{\frac{1}{k}}$ kde k je nejmen. společný násobek k_i
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right)\ dx$	$t = \frac{ax+b}{cx+d}^{\frac{1}{k}}$ kde k je nejmen. společný násobek k_i
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\ dx$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$ pro $a > 0$ $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$ pro $c \geq 0$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\ dx$	$x = a\sin t$ $\quad x = a\cos t$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\ dx$	$x = a\,\mathrm{tg}\, t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\ dx$	$x = \frac{a}{\sin x}$ $\quad x = \frac{a}{\cos x}$
$\int R(x, \sin x, \cos x)\ dx$	$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$ $\sin x = t$, R lichá v kosinu $\cos x = t$, R lichá v sinu $\sin x = t$, R sudá v sinu i v kosinu
$\int R(\mathrm{tg}\, x)$	$\mathrm{tg}\, x = t$
$\int R(\mathrm{e}^x)$	$\mathrm{e}^x = t$

Příklady užití doporučených substitucí

Následující příklady slouží spíše pro ucelení představy studentů o použití výše doporučených substitucích.

Příklad. Integrujte $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x-\sqrt{x}}dx$.

Řešení. Integrand je ve tvaru $R\left(x, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{2}}\right)$. Nejmenší společný násobek $(1,4,2)$ je 4. Volíme substituci $t = x^{\frac{1}{4}}$.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x-\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} t = x^{\frac{1}{4}} \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt[4]{t^4}}{t^4 - \sqrt[2]{t^4}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t \cdot t^3}{t^4 - t^2} dt =$$

$$4 \int 1 + \frac{t^2}{t^4-t^2} dt = |\text{rozklad na parciální zlomky}| = 4 \int 1 - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)} dt =$$

$$4\left(t - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|t-1|\right) = 4\sqrt[4]{x} - 2\ln|\sqrt[4]{x}+1| + 2\ln|\sqrt[4]{x}-1| + c$$

Příklad. Integrujte $\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$.

Řešení. Zvolme substituci

$$t = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}, \quad t^3 = \frac{2x+1}{x+1}; \quad x = \frac{t^3-1}{2-t^3}, \quad dx = \frac{3t^2}{(2-t^3)^2} dt.$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int t \cdot \frac{\left(2-t^3\right)^2}{\left(t^3-1\right)^2} \cdot \frac{3t^2}{\left(2-t^3\right)^2} dt = \int \frac{3t^3}{\left(t^3-1\right)^2} dt =$$

$$= |\text{ opět provedeme rozklad na parciální zlomky }| =$$

$$= \int \left(\frac{t}{3(t-1)^2} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+3}{3(t^2+t+1)}\right) dt =$$

$$= -\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} =$$

$$-\frac{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}}{\frac{2x+1}{x+1}-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} - 1\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}$$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}} dx$.

Řešení. Zde je $a > 0$ volíme substituci

$$t = \sqrt{x^2+2x+3} - x, \quad t + x = \sqrt{x^2+2x+3}; \quad x^2+2x+3 = t^2+2tx+x^2.$$

$$\text{Odtud } x = \frac{3-t^2}{2(t-1)} \qquad \text{a dále } dx = \frac{-t^2+2t-3}{2(t-1)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x + t = \frac{3-t^2}{2(t-1)} + t = \frac{t^2-2t+3}{2(t-1)}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}}dx = 2\int \frac{1}{t^2-3}dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}\right| + c.$$

Příklad. Integrujte funkci $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$.

Řešení. Tato funkce je lichá v sinu,proto volíme substituci $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\sin x dx = \begin{vmatrix} t = cosx \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} =$$
$$\int \frac{1-t^2}{1+t}\sin x \frac{dt}{-\sin x} = -\int (1-t)dt = \frac{t^2}{2} - t + c = \frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + c.$$