Řešení soustavy dvou rovnic

Jednou z nejdůležitějších aplikací matic je nalezení řešení soustavy lineárních rovnic. V tomto letáku si vysvětlíme, jak to lze provést.

Převod soustavy rovnic do maticového tvaru

Budeme uvažovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - 5y &= 1. \end{aligned}$$

Tyto rovnice mohou být zapsány v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Každou matici si označíme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a dostaneme

$$AX = B.$$

Toto je **maticový tvar** soustavy rovnic. Jedinou neznámou je zde X, protože A a B už známe. Matice A se nazývá **matice soustavy** a obsahuje koeficienty původních rovnic.

Řešení soustavy rovnic s regulární maticí soustavy A

Je dán maticový tvar

$$AX = B,$$

obě strany vynásobíme inverzní maticí A^{-1} a dostaneme

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Víme, že $A^{-1}A = I$ je jednotková matice. Také víme, že pokud násobíme matici X jednotkovou maticí I, zůstane matice X nezměněna, $IX = X$, a proto

$$X = A^{-1}B.$$

Důležité tvrzení

Pokud je dáno $\quad AX = B, \qquad$ pak platí $\qquad X = A^{-1}B.$

Toto tvrzení je základem jedné z metod pro řešení soustavy rovnic. Vše, co musíme udělat, je zapsat soustavu rovnic v maticovém tvaru, spočítat inverzní matici koeficientů a nakonec matice vynásobit.

Tématický příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - 5y &= 1. \end{aligned}$$

Řešení. Zápis rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme spočítat inverzní matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(-5) - (2)(3)} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak matice X je dána

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení soustavy je $x = 2$, $y = 1$.

Tématický příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 2 \\ -3x + y &= 11. \end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme soustavu v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme spočítat inverzní matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2)(1) - (4)(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak matice X je dána

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -42 \\ 28 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení soustavy je $x = -3$, $y = 2$.

Užitečná poznámka. V praxi se používají jiné postupy řešení soustav rovnic, ale uvedená metoda je velmi užitečná (například pro teoretické odvození řady důležitých tvrzení).