Základní operace s maticemi

Inverzní matice 3×3

V tomto letáku si ukážeme, jak najít inverzní matici o rozměru 3×3. K nalezení inverzní matice je potřebná znalost pojmů **determinant** a **kofaktor** matice 3×3. Výpočet determinantu a kofaktorů matice si můžete připomenout v předchozích letácích.

Adjungovaná a inverzní matice

Budeme uvažovat matici A a matici kofaktorů C ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 8 & -11 & -34 \\ -5 & 7 & 21 \end{pmatrix}.$$

Aby bylo možné najít inverzní matici k matici A, nejdříve musíme použít matici kofaktorů C k vytvoření **adjungované** matice, kterou značíme $\mathrm{adj}(A)$. Adjungovaná matice $\mathrm{adj}(A)$ je transponovaná matice kofaktorů C^T

$$\mathrm{adj}(A) = C^T.$$

Vzpomeňte si, že transponovanou matici lze najít přehozením řádků a sloupců tak, že

$$\mathrm{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}.$$

Pak vzorec pro inverzní matici je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

kde $\det(A)$ je determinant matice A.

Důležité tvrzení

Inverzní matice A^{-1} k matici A je dána vztahem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A),$$

kde $\det(A)$ je determinant matice A a $\mathrm{adj}(A)$ je adjungovaná matice.

Inverzní matice má tu vlastnost, že

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I,$$

kde I je jednotková matice.

Tématický příklad. Najděte inverzní matici A^{-1} k matici A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. My už víme, že

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice A je roven 1, a proto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}.$$

Správnost výpočtu si můžete ověřit dokázáním, že $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$, kde I je jednotková matice rozměru 3×3.

Řešení soustavy rovnic

Nyní si ukážeme, jak lze použít inverzní matici při řešení soustavy rovnic.

Tématický příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 7x + 2y + z &= 21 \\ 3y - z &= 5 \\ -3x + 4y - 2z &= -1. \end{aligned}$$

Řešení. Tyto rovnice zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že pokud máme $AX = B$, pak platí $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 + 40 + 5 \\ 63 - 55 - 7 \\ 189 - 170 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy je $x = 3$, $y = 1$ a $z = -2$.

Užitečná poznámka. Pokud se determinant matice A bude rovnat nule, pak není možné nalézt inverzní matici A^{-1} a tato metoda nebude aplikovatelná.