Derivování složené funkce

V tomto letáku si představíme speciální pravidlo pro derivování složené funkce (tedy funkci obsahující další funkci). Po přečtení tohoto textu byste měli být schopni:

- vysvětlit pojem složené funkce,
- rozeznat funkci vnořenou do funkce,
- derivovat složenou funkci.

Úvod

V této jednotce se naučíme jak odlišit "funkci ve funkci". Nejprve si vysvětlíme co je myšleno tímto pojmem, pak se dozvíme, jak takovouto složenou funkci derivovat.

Funkce ve funkci

Nejprve uvažujme $\cos x^2$. Na první pohled je každému zřejmé, že je odlišná od elementární funkce $\cos x$. Vidíme, že funkce x^2 je argumentem kosinu.

Tedy si obecně představme, že máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$. Pak výsledná složená funkce je tvaru

$$y = f(g(x)),$$

tedy y je funkcí funkce. Tedy v našem případě $f(x)$ je funkce kosinus a $g(x)$ je funkce kvadratická. Tedy přesněji matematicky řečeno

$$f(x) = \cos x \qquad \text{a} \qquad g(x) = x^2,$$

tedy

$$f(g(x)) = f(x^2) = \cos x^2.$$

Tedy už víme, jak vypadá složená funkce, případně jak můžeme skládat funkce. Ovšem skládání funkcí není komutativní, tedy $f(g(x)) \neq g(f(x)$. To si můžeme snadno ověřit na našem původním příkladě. Jestliže máme

$$f(x) = \cos x \qquad \text{a} \qquad g(x) = x^2,$$

pak

$$g(f(x)) = g(\cos x) = (\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

Tedy $\cos^2 x$ je taky "funkcí funkce,"ale rozhodně je to různá funkce od $\cos x^2$. V následující sekci se naučíme jak derivovat složené funkce.

Derivace složené funkce

V případě derivování složené funkce $y = f(g(x))$, tj k nalezení derivace $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ postupujeme dle následujícího návodu:

1. Zavedeme substituci $u = g(x)$. Tedy složenou funkci máme nyní ve tvaru
$$y = f(u).$$
2. Nyní potřebujeme použít algoritmus, známý jako řetězové pravidlo.

Důležité tvrzení 1: Řetězové pravidlo

Derivujeme funkci ve tvaru $y = f(g(x))$, položíme $u = g(x)$. Pak $y = f(u)$ a
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

3. Vyjádříme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ pomocí x.

Příklad. Chceme derivovat funkci $y = \cos x^2$. Zavedeme substituci $u = x^2$, tedy $y = \cos u$. Podle výše uvedeného pravidla platí
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = -\sin u.$$
Použitím řetězového pravidla získáme:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

pak víme, že
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin u \cdot 2x,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x \sin x^2.$$

Příklad. Nyní budeme derivovat funkci $y = \cos^2 x$. Zavedeme substituci $u = \cos x$, tedy $y = u^2$. Pak platí
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin x \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 2u.$$
Použitím řetězového pravidla získáme:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

potom

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2u\cdot(-\sin x),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2\cos x\sin x.\end{aligned}$$

Příklad. Představíme si, jak můžeme derivovat funkci $y=(2x-5)^5$.

Samozřejmě můžeme derivovat tuto funkci jako pět součinů, tj

$$y=(2x-5)\cdot(2x-5)\cdot(2x-5)\cdot(2x-5)\cdot(2x-5).$$

Tento postup je ale příliš pracný a neefektivní, také vzniká spoustu příležitostí pro chybu během výpočtu.

Proto i takovéto (složené) funkce derivujeme pomocí řetězového pravidla. Tedy položme $u=2x-5$, pak $y=u^5$ a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=5u^4.$$

Následně zjistíme, že

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= 5u^4\cdot 2\\ &= 10(2x-5)^4.\end{aligned}$$

Tip pro derivování funkcí s k násobkem argumentu

V této sekci uvažujeme elementární funkce s k násobkem argumentu, následně k nim přistupujeme obecněji a tak představíme náš tip pro derivování složených funkcí speciálního typu.

Příklad. Teď už umíme zderivovat složenou funkci. Připomeňme si, jak se derivujeme např. $y=\sin 5x$ zavedením substituce $u=5x$, pak $y=\sin u$. Derivace jsou

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=5 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u.$$

Z řetězového pravidla získáme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= 5\cdot\cos u\\ &= 5\cdot\cos 5x.\end{aligned}$$

Všimněme si, že se 5 objevila na začátku zderivované funkce. Je to tím, že derivace vnitřní složky $5x$ je rovna 5. Otázkou tedy je, jestli můžeme takto jednoduše derivovat každou složenou funkci, jejíž argument je násoben libovolnou konstantou?

Důležité tvrzení 2: Pamatuj si!

Jestli máme funkci f, kde její argument x je násoben konstantou k, tj. $y = f(kx)$, pak její derivaci dostaneme ve tvaru

$$y' = k \cdot f'(kx).$$

Příklad. Derivujeme-li funkci $y = \ln \frac{1}{2}x$, pak podle vzorečku výše je její derivace

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x}.$$

Jednoduchou úpravou získáme elegantní tvar

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Technika pro přímé derivování složené funkce

V této sekci si ukážeme jak zrychlit postup při derivování složené funkce.

Příklad. Chceme-li zderivovat funkci $y = \underbrace{\mathrm{tg}\,(\overbrace{\sin x}^{\text{vnitřní sl.}})}_{\text{vnější sl.}}$, je nutné rozpoznat vnitřní složku funkce. V našem případě je vnitřní složka $y = \sin x$.

Při derivování postupujeme tak, že nejprve zderivujeme vnější složku funkce, kterou násobíme derivací vnitřní složky funkce. Potom derivace je ve tvaru

$$y' = \frac{1}{\underbrace{\cos^2 \sin x}_{\text{der. vnější sl.}}} \cdot \overbrace{\cos x}^{\text{der. vnitřní sl.}} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin x}.$$

V podstatě derivování tímto způsobem není nic jiného než zjednodušená aplikace řetězového pravidla.

Příklad. Budem-li derivovat funkci $y = \underbrace{\ln \overbrace{\mathrm{cotg}\,\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{\text{vs.vs.}}}^{\text{vnitřní sl.}}}_{\text{vnější sl.}}$, kde vs.vs. je vnitřní složka vnitřní složky, stejně jako v předchozím příkladě je nutné poznat vnitřní složku funkce. V tomto případě je vnitřní složka $y = \mathrm{cotg}\,\mathrm{e}^{x}$ a ta ještě obsahuje další vnitřní složku e^{x}.

Při derivování postupujeme tak, že nejprve zderivujeme vnější složku funkce, kterou násobíme derivací vnitřní složky funkce. Jestliže i vnitřní složka je složená funkce, pak znovu násobíme derivovanou vnitřní složkou vnitřní funkce.

$$y' = \frac{1}{\underbrace{\mathrm{cotg}\,\mathrm{e}^{x}}_{\text{der. vnější sl.}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{-\sin^2 \mathrm{e}^{x}}}^{\text{der. vnitřní sl.}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{\text{der. vs. vs.}} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \mathrm{e}^{x} = -\frac{\mathrm{e}^{x}}{\cos x \sin x}$$

V stejně jako v prvním příkladě jsme aplikovali řetězové pravidlo.

Cvičení. Najděte derivace všech následujících funkcí:

a)	$(3x-7)^{12}$	b)	$\sin(5x+2)$	c)	$\ln(2x-1)$	d)	$\mathrm{e}^{\,2-3x}$	e)	$\sqrt{5x-3}$
f)	$(6x+5)^{\frac{5}{3}}$	g)	$\frac{1}{(3-x)^4}$	h)	$\cos(1-4x)$	i)	$\ln(\sin x)$	j)	$\sin\ln x$
k)	$\mathrm{e}^{\,-\cos x}$	l)	$\cos\mathrm{e}^{\,-x}$	m)	$(\sin x+\cos x)^3$	n)	$\ln x\cdot\sin x$	o)	$\frac{1}{cosx}$

Odpovědi.

a)	$36(3x-7)^{11}$	b)	$5\cos(5x+2)$	c)	$\frac{2}{2x-1}$	d)	$-3\mathrm{e}^{2-3x}$
e)	$\frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$	f)	$10(6x+5)^{2/3}$	g)	$\frac{4}{(3-x)^5}$	h)	$4\sin(1-4x)$
i)	$\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$	j)	$\frac{\cos(\ln x)}{x}$	k)	$\sin x\mathrm{e}^{\,-\cos x}$	l)	$\mathrm{e}^{\,-x}\sin\left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)$
m)	$3(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2$	n)	$\frac{\sin x+\ln x\cos x}{x}$	o)	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$		

Cvičení. Zderivujte

a)	$\ln\left(\sin^2 x\right)$	b)	$\sin^2(\ln x)$	c)	$\sqrt{\cos(3x-1)}$	d)	$\left[1+\cos\left(x^2-1\right)\right]^{3/2}$

Odpovědi.

a)	$\frac{2\cos x}{\sin x}=2\cot x$	b)	$\frac{2\sin(\ln x)\cos(\ln x)}{x}$
c)	$\frac{-3\sin(3x-1)}{2\sqrt{\cos(3x-1)}}$	d)	$-3x\sin\left(x^2-1\right)\left[1+\cos\left(x^2-1\right)\right]^{1/2}$