Derivace

Derivování logaritmické a exponenciální funkce

Tato jednotka obsahuje podrobné informace o derivování logaritmické a expononciální funkce. Pro správné pochopení uvedené techniky derivování je důležité znát základní princip derivace.

Po přečtení tohoto letáku, nebo zhlédnutí instruktážního videa, byste měli být schopni:

- derivovat $\ln x$ přímo z definice derivace
- derivovat e^x přímo z definice derivace

Úvod

V této části si představíme, jak derivovat funkce $\ln x$ a e^x přímo ze základního principu (z definice derivace).

K pochopení následujícího, nejprve potřebujeme porozumět exponenciální konstantě e. Ta je určena jako limita pro t jdoucí k nule z výrazu $(1+t)^{1/t}$ t.j. $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$.

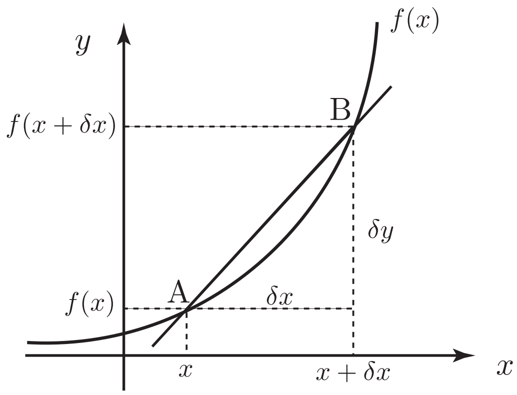
Chceme-li získat představu proč tomu tak je, budeme snižovat hodnotu$t$ ve výrazu $(1+t)^{1/t}$, jak je uvedeno v Tabulce 1. Jestliže se hodnota t stále víc blíží k nule, výraz nabývá hodnotu, která se stále víc blíží konstantě $e \approx 2.718...$. Můžete vyzkoušet nějaké hodnoty z tabulky. Dále můžete ještě více snižovat hodnotu t a sledovat jak se odhad e zpřesňuje.

t	$(1+t)^{1/t}$	
1	$(1+1)^{1/1}$	$= 2$
0.1	$(1+0.1)^{1/0.1}$	$= 2.594$
0.01	$(1+0.01)^{1/0.01}$	$= 2.705$
0.001	$(1.001)^{1/0.001}$	$= 2.717$
0.0001	$(1.0001)^{1/0.0001}$	$= 2.718$

Tabulka 1

Derivace funkce $f(x)$

Připomeňme že, derivaci funkce $f(x)$ hledáme jako sklon $\frac{\delta y}{\delta x}$ přímky procházející bodem A a bodem B na grafu funkce $f(x)$. Pak učíme limitu $\frac{\delta y}{\delta x}$, kde δx je jdoucí k nule. (Viz Obrázek 1).



Obrázek 1. $\frac{\delta y}{\delta x}$ je sklon AB.

Derivace je $f'(x)$ je pak daná vztahem

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Tento postup je kompletně vysvětlen v letáku Princip derivace.

Derivace funkce $f(x) = \ln x$

Při derivování přímo z derivace v případě, že $f(x) = \ln x$, položíme výraz

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{\ln(x+\delta x) - \ln x}{\delta x}.$$

Pro výpočet nejprve upravíme tvar $\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ podle vzorečku $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$, pak máme

$$\frac{1}{\delta x}\left(\ln(x+\delta x) - \ln x\right) = \frac{1}{\delta x} \ln\left(\frac{x+\delta x}{x}\right) = \frac{1}{\delta x} \ln\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right).$$

Pro zjednodušení výpočtu zavedeme substituci $t = \frac{\delta x}{x}$, z toho plyne, že $\delta x = xt$. (Tato substituce je důležitým krokem, protože v následujících výpočtech má zlomek $\frac{\delta x}{x}$ zásadní význam. Nemusíme mít obavy, že pro $x = 0$ by zlomek nebyl definován, jde nám totiž o derivování $\ln x$ a logaritmus je definovaný jen pro kladné hodnoty proměnné x.)

Pak

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{1}{xt} \ln(1+t).$$

Dále použijeme další vzoreček pro úpravu logaritmů, a to $n \log A = \log A^n$ a upravíme pravou stranu předchozí rovnosti jako

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{1}{x} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

Chceme-li nalézt derivaci musí se δx limitně blížit k nule. Protože jsme položili $t = \frac{\delta x}{x}$, musí se taky t limitně blížit nule.

V našem případě máme derivaci rovnou limitě, t.j.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

V této limitě t je jdoucí k nule, x můžeme považovat za pevné číslo a vytknou x před limitu.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \ln\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}$$

Víme, že

$$\lim_{t \to 0} \left(1+t\right)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}$$

a tak

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln \mathrm{e} = \frac{1}{x},$$

protože $\ln \mathrm{e} = 1$.

Ukázali jsme přímo z definice derivace, že derivace $\ln x$ je rovna $\frac{1}{x}$.

Důležité tvrzení 1: Derivace $\ln x$

Je-li $\quad f(x) = \ln x, \quad$ pak $\quad f'(x) = \frac{1}{x}.$

Cvičení.

1 Ukaž za použití techniky popsané výše, že pro $f(x) = \log_{10} x$ je $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.

2 Ukaž za použití techniky popsané výše, že pro $f(x) = \log_a x$ je $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Derivace funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$

K derivování funkce $y = \mathrm{e}^x$ budeme tento výraz přepisovat alternativní formou ve tvaru logaritmu:

$$\ln y = x$$

Pak derivace obou stran podle proměnné x,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) = 1.$$

Tato idea nám pomůže nalézt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Připomeňme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\ln y) \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. (Tento výsledek je získán technikou známou jako **řetězové pravidlo**. Toto pravidlo naleznete přehledně zpracované v letáku Derivace složené funkce).

Nyní víme ze sekce Derivace funkce $f(x) = \ln x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\ln y) = \frac{1}{y}$ a také

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1.$$

Přeskupením získáme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y.$$

Ale $y = \mathrm{e}^x$ a tak máme důležitý a dobře známý výsledek, že

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x.$$

Důležité tvrzení 2

Je-li $\quad f(x) = \mathrm{e}^x, \quad$ pak $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x.$

Cvičení.

1 Ukaž za použití základního principu derivace, že pro $f(x) = a^x$ je $f'(x) = a^x \ln a$.