Derivace

Derivování funkce x^n

V této jednotce ukážeme derivování funkce $y = x^n$ užitím základního principu derivace. Leták je pak doplněn několika příklady k snadnému pochopení tohoto tématu.

Po přečtení tohoto letáku nebo shlédnutí instruktážního videa byste měli být schopni:

- derivovat $y = x^n$, když n je přirozené číslo, přímo z definice derivace.
- použít výsledky z tohoto letáku k derivování různých funkcí podobného tvaru.

Úvod

V této jednotce si představíme, jak derivovat funkci $y = x^n$ přímo ze základního principu (z definice derivace). Přitom číslo n může nabývat kladných nebo záporných hodnot, dokonce může být reprezentováno jako zlomek. Na začátku uvažujeme případy, kde n je přirozené číslo, jako např. u funkcí x^2, x^7.

Derivace $y = x^n$ když n je přirozené číslo

Připomeňme definici derivace funkce $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}.$$

V tomto letáku aplikujeme tento vzoreček na funkci $y = x^n$.

Máme tedy

$$f(x) = x^n$$

a také

$$f(x + \delta x) = (x + \delta x)^n.$$

Pro samotný výpočet využijeme binomickou větu, která má tvar:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

(Binomická věta je zde jen stručně připomenuta. Pro ucelenější představu odkazujeme čtenáře na nastudování binomické věty a Pascalova trojúhelníku.) Aplikací binomické věty na výraz $(x + \delta x)^n$ zjistíme, že

$$(x + \delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\delta x + \ldots + (\delta x)^n.$$

Pak, tvar formule pro derivování

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\delta x + \ldots + (\delta x)^n \; - \; x^n}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\delta x + \ldots + (\delta x)^n}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(\delta x)(nx^{n-1} + \ldots + (\delta x)^{n-1})}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \to 0} nx^{n-1} + \ldots + (\delta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že všechny součiny vpravo obsahující δx, kde δx je jdoucí k nule, jsou rovny nule. Tedy výsledkem je, že

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Důležité tvrzení 1: Derivace x^n

Je-li $\quad y = x^n, \quad$ pak $\quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$

Máme vyřešené derivování funkce x^n pro případy, kdy n je přirozené číslo. Faktem zůstává, že získaný výsledek platí i pro záporná n, stejně tak platí obdržený výsledek pro derivování funkce $y = x^n$ obsahující zlomek v exponentu. Tento výpočet necháme jako cvičení čtenáři.

Cvičení. Ukažte za použití techniky popsané výše, že pro $f(x) = x^{-\frac{a}{b}}$ je $f'(x) = -\frac{a}{b}x^{-\frac{a-b}{b}}$.

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Řešení. Použijeme výsledek (získaný výše) pro $n = \frac{1}{2}$, pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x^{-1}$.

Řešení. Použijeme výsledek (získaný výše) pro $n = -1$, pak

$$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x^7$.

Řešení. Použijeme výsledek (získaný výše) pro $n = 7$, pak

$$\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x$.

Řešení. Použijeme výsledek (získaný výše) pro $n = 1$, pak

$$\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.$$

Co se stane, jestliže $n = 0$?

Příklad.
Jestliže $n = 0$, pak chceme derivovat funkci $y = x^0$.

Řešení. Aplikováním našeho výsledku získaného výše máme

$$\frac{dy}{dx} = 0 \cdot x^{0-1} = 0.$$

Tedy derivace $y = x^0$ je rovna nule. Poznamenejme, že $x^0 = 1$. Uvažujeme-li konstantní funkci $y = 1$, kde grafem takovéto funkce je přímka rovnoběžná s osou x a procházející bodem $[0, 1]$, nemůžeme být překvapeni, že její derivace (směrnice tečny) je rovna 0.

Cvičení. Najdi derivace následujících funkcí:

a)	$y = x^6$	b)	$y = x^{10}$	c)	$y = x^4$	d)	$y = x^{12}$
e)	$y = x^{-2}$	f)	$y = x^{-8}$	g)	$y = x^{-5}$	h)	$y = x^{-234}$
i)	$y = x^{13/2}$	j)	$y = x^{7/4}$	k)	$y = x^{3/5}$	l)	$y = x^{2/3}$
m)	$y = \frac{1}{x^4}$	n)	$y = \sqrt{x}$	o)	$y = x^{-3/2}$	p)	$y = x^{-1/5}$

Odpovědi.

a)	$y' = 6x^5$	b)	$y' = 10x^9$	c)	$y' = 4x^3$	d)	$y' = 12x^{11}$
e)	$y' = -2x^{-3}$	f)	$y' = -8x^{-9}$	g)	$y' = -5x^{-6}$	h)	$y' = -234x^{-235}$
i)	$y' = \frac{13}{2}x^{11/2}$	j)	$y' = \frac{7}{4}x^{3/4}$	k)	$y' = \frac{3}{5}x^{-2/5}$	l)	$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$
m)	$y' = -\frac{4}{x^5}$	n)	$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	o)	$y' = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$	p)	$y' = -\frac{1}{5}x^{-6/5}$

Nějaké příklady zahrnující linearitu derivace

Ukážeme derivování dalších složitějších příkladů, kde je zapotřebí si uvědomit následující pravidla: když

$$y = f(x) \pm g(x),$$

pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}.$$

A také: když

$$y = kf(x) \qquad \text{kde } k \text{ je konstanta,}$$

pak
$$\frac{dy}{dx} = k\frac{df}{dx}.$$
Obě tyto pravidla jsou dobře popsáná v jednotce **Linearita derivace**, tedy je tu nebudeme více rozebírat.

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat funkci $y = 6x^3 - 12x^4 + 5$.

Řešení. Potom
$$\frac{dy}{dx} = 6(3x^2) - 12(4x^3) + 0 = 18x^2 - 48x^3.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat funkci $y = x - 5x^5 + 6x^7 + 25$.

Řešení. Nyní byste již měli být natolik schopní, abyste při derivování spojili několik početních úkonu do jednoho. Tedy chceme-li například derivovat funkci $y = -5x^5$, píšeme rovnou výsledek $y' = -25x^4$. Potom
$$\frac{dy}{dx} = 1 - 25x^4 + 42x^6.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat funkci $y = \frac{1}{x} + 6x - 4x^{3/2} + 8$.

Řešení. Připomeňme, že $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Potom
$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 6 - 6x^{1/2}.$$

Příklad.
Předpokládejme, že chceme derivovat funkci $y = 4x^{1/3} - 5x + 6/x^3$.

Řešení. Připomeňme, že $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Potom
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{-2/3} - 5 - 18x^{-4}.$$

Cvičení. Najdi derivace následujících funkcí:

a) $y = 5x^2$	b) $y = 8x^6$	c) $y = 3x^{-2}$	d) $y = 4x^{-3/5}$
e) $y = x^6 + x^8$	f) $y = x^{10} + 1$	g) $y = x^{-3} + x$	h) $y = 5 + x^{9/2}$
i) $y = 12x^3 - 3x^2$	j) $y = 5x + 3x^{-2}$	k) $y = 6x^2 + 3x^{3/4}$	l) $y = 7x^{-3} - 9x$
m) $y = 4x^{1/4} - 3x^{-1/3}$	n) $y = 2 + 7x^6$	o) $y = 3x - 4x^{-1/2}$	p) $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

Řešení.

a) $y' = 10x$	b) $y' = 48x^5$	c) $y' = -6x^{-3}$	d) $y' = -\frac{12}{5}x^{-8/5}$
e) $y' = 6x^5 + 8x^7$	f) $y' = 10x^9$	g) $y' = -3x^{-4} + 1$	h) $y' = \frac{9}{2}x^{7/2}$
i) $y' = 36x^2 - 6x$	j) $y' = 5 - 6x^{-3}$	k) $y' = 12x + \frac{9}{4}x^{-1/4}$	l) $y' = -21x^{-4} - 9$
m) $y' = x^{-3/4} + x^{-4/3}$	n) $y' = 42x^5$	o) $y' = 3 + 2x^{-3/2}$	p) $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$