Derivace

Derivování součinu funkcí

Speciální **pravidlo pro derivaci součinu** je pravidlo podle, kterého derivujeme součin dvou (případně více) funkcí. Tato jednotka představuje použití tohoto pravidla.

Po přečtení tohoto textu nebo shlédnutí videa týkající se tohoto tématu byste měli být schopni:

- zreprodukovat pravidlo pro derivování součinu.
- derivovat funkce ve tvaru součinu, t.j. $y = u \cdot v$.

Úvod

Někdy máme funkce, které jsou výsledkem součinu dvou funkcí. Tak například to může být

$$y = x^2 \cdot \cos 3x.$$

Zde máme první funkci x^2, která je v součinu s druhou funkcí $\cos 3x$. Poznamenejme, že můžeme také psát $y = uv$, kde $u = x^2$ a $v = \cos 3x$. Funkce v takovémto tvaru jsou často používané a mají i řadu aplikací. Například funkce tlumených kmitů

$$y = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin x,$$

kde kmitání je postupně utlumováno vlivem tření a odporu prostředí.

Nyní představíme pravidlo, které nám umožňuje derivovat takovéto funkce. Toto pravidlo pojmenujeme jako **pravidlo pro derivaci součinu**. V této lekci uvedeme a budeme používat toto pravidlo.

Pravidlo pro derivování součinu funkcí

Důležité tvrzení 1: Pravidlo pro derivování součinu

Je-li $y = uv$, pak

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Vždy když máme derivát v součinovém tvaru, používáme toto pravidlo.

Příklad. Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x^2 \cos 3x$.

Řešení. Nejprve položme $u = x^2$ a $v = \cos 3x$. Dále spočítáme derivace každé funkce,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -3\sin 3x.$$

Nyní přepíšeme všechny dílčí výsledky do formule pro derivování součinu:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= x^2 \cdot (-3\sin 3x) \;+\; \cos 3x \cdot 2x.\end{aligned}$$

Můžeme ještě upravit výsledek do přijatelnější podoby. Všimněme si, že každý výraz obsahuje proměnou x. Tedy můžeme x vytknout před závorku, tak nakonec

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(-3x\sin 3x + 2\cos 3x).$$

Příklad. Předpokládejme, že chceme derivovat $y = (1 - x^3)\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení. Nejprve položme $u = 1 - x^3$ a $v = \mathrm{e}^{2x}$. Opět spočítáme derivace každé funkce,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -3x^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Když dosadíme, získáme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= (1 - x^3) \cdot 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} \cdot (-3x^2) \\ &= \mathrm{e}^{2x}(2 - 3x^2 - 2x^3)\end{aligned}$$

Příklad. Předpokládejme, že chceme derivovat $y = x^3(4 - x)^{1/2}$.

Řešení. Nejprve položme $u = x^3$ a $v = (4 - x)^{1/2}$. Opět spočítáme derivace každé funkce,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -1 \cdot \frac{1}{2}(4 - x)^{-1/2}.$$

Pro získání derivace v musíme použít pravidlo pro derivování složené funkce (to je vysvětlené v jednotce derivace složené funkce). Nejprve připomeneme vzoreček pro derivaci funkce ve tvaru $y = uv$, pak $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}(4 - x)^{-1/2}\right) + (4 - x)^{1/2} \cdot 3x^2.$$

Opět platí, že výsledek bychom měli ještě upravit. Podívejme se na to, jak se nám to může pěkně zjednodušit. Víme, že $(4 - x)^{-1/2}$ je to samé jako $\frac{1}{(4-x)^{1/2}}$. Tak

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^3}{2(4 - x)^{1/2}} + (4 - x)^{1/2} \cdot 3x^2.$$

Nyní sečteme výrazy,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x^3}{2(4-x)^{1/2}} + \frac{(4-x)^{1/2}\cdot 3x^2}{1}\cdot\frac{2(4-x)^{1/2}}{2(4-x)^{1/2}} \\
&= \frac{-x^3+6x^2(4-x)}{2(4-x)^{1/2}} \\
&= \frac{x^2(24-7x)}{2(4-x)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že výsledek je nyní v pěkném a úhledném tvaru, a s takovým výrazem můžeme jednoduše provádět další operace.

Cvičení. Najdi derivace všech následujících funkcí:

a) $y = xe^x \sin x$ b) $y = 5e^{-2x}\sin 3x$ c) $y = x^2e^{-x}$ d) $y = 3x^{1/2}\cos 2x$

e) $y = 2x^6(1+x)^5$ f) $y = x^{-2}(1+x^2)^{1/2}$ g) $y = x\tan x$ h) $y = 7x^{3/2}e^{-4x}\cos 2x$

Odpovědi.

a) $e^x[(1+x)\sin x + \cos x]$ b) $5e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

c) $x(2-x)e^{-x}$ d) $\frac{3}{2}x^{-1/2}(\cos 2x - 4x\sin 2x)$

e) $2x^5(1+x)^4(6+11x)$ f) $-x^{-3}((1+x^2)^{-1/2}(2+x^2)$

g) $x\sec^2 x + \tan x$ h) $\frac{7}{2}x^{1/2}e^{-4x}(3\cos 2x - 8x\cos 2x - 4x\sin x)$