Derivace

Derivace funkce sinus a kosinus

V této jednotce ukážeme derivování funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ užitím základního principu derivace. Leták je dále doplněn několika příklady k snadnému pochopení tohoto tématu.

Po přečtení tohoto letáku nebo shlédnutí instruktážního videa vztahujícího se k tomuto tématu, byste měli být schopni:

- derivovat funkci $\sin x$ přímo z definice derivace.
- derivovat funkci $\cos x$ přímo z definice derivace.

Úvod

V této jednotce ukážeme derivování funkce $f(x) = \sin x$ a $f(x) = \cos x$ přímo ze základního principu derivace. Nejprve si musíme připomenou několik známých faktů.

1. **Definici derivace** $f(x)$
   Definice derivace funkce $y = f(x)$ je
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}.$$
2. **Dva trigonometrické vzorečky**
   Budeme pracovat se dvěma trigonometrickými vzorečky a to
$$\begin{aligned} \sin C - \sin D =& 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}, \\ \cos C - \cos D =& -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right). \end{aligned}$$
3. **Limitu funkce** $\frac{\sin\theta}{\theta}$
   Jestliže se θ limitně blíží k nule, funkce $\frac{\sin\theta}{\theta}$ se blíží hodnotě 1 a píšeme
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$
   Tento výsledek můžeme snadno ilustrovat v následující tabulce, kde pro stále menší hodnoty θ sledujeme chování funkce $\frac{\sin\theta}{\theta}$.

θ	$\sin\theta$	$\frac{\sin\theta}{\theta}$
1	0.84147	0.84147
0.1	0.09983	0.99833
0.01	0.00999	0.99983

Tabulka 1: Hodnota funkce $\frac{\sin\theta}{\theta}$ pro θ jdoucí k 0 je rovna 1.

Můžete vyzkoušet další hodnoty blízké 0 a sledovat, jak se chová funkce $\frac{\sin\theta}{\theta}$.

Použijeme tyto výsledky k derivování funkce $f(x) = \sin x$ přímo z definice derivace.

Derivace $f(x) = \sin x$

Jestliže máme $f(x) = \sin x$, potom $f(x + \delta x) = \sin(x + \delta x)$.

Tak

$$f(x + \delta x) - f(x) = \sin(x + \delta x) - \sin x.$$

Pravá strana je rozdíl dvou funkcí sinus. Tedy použijeme první trigonometrický vzoreček, připomenutý výše a přepíšeme výraz do alternativního tvaru.

$$\begin{aligned}
\sin(x + \delta x) - \sin x &= 2\cos\frac{x + \delta x + x}{2}\sin\frac{\delta x}{2} \\
&= 2\cos\frac{2x + \delta x}{2}\sin\frac{\delta x}{2} \\
&= 2\cos(x + \frac{\delta x}{2})\sin\frac{\delta x}{2}.
\end{aligned}$$

Dále, použijeme definici derivace

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \to 0}\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0}\frac{2\cos(x + \frac{\delta x}{2})\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}.
\end{aligned}$$

Číslo 2 můžeme přesunout do jmenovatele, potom výraz v limitě má alternativní tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(x + \frac{\delta x}{2})\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x/2} \\
&= \cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}.
\end{aligned}$$

Necháme-li δx klesat do nuly, pak uvažovaný výraz $\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1$. To je zřejmé z dřívějšího výsledku, kde jsme ilustrovali, že $\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$. Potom máme

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} \\
&= \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} \\
&= \cos(x) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Tedy získali jsme výsledek

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Derivace $f(x) = \cos x$

Jestliže máme $f(x) = \cos x$, potom $f(x + \delta x) = \cos(x + \delta x)$.

Tak
$$f(x + \delta x) - f(x) = \cos(x + \delta x) - \cos x.$$

Pravá strana je rozdíl dvou funkcí kosinus. Tedy potřebujeme použít druhý trigonometrický vzoreček, a to
$$\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \sin\left(\frac{C - D}{2}\right).$$

Potom výraz v pravo přepíšeme do alternativní podoby.

$$\begin{aligned}
\cos(x + \delta x) - \cos x &= -2 \sin \frac{x + \delta x + x}{2} \sin \frac{\delta x}{2} \\
&= -2 \sin \frac{2x + \delta x}{2} \sin \frac{\delta x}{2} \\
&= -2 \sin(x + \frac{\delta x}{2}) \sin \frac{\delta x}{2}.
\end{aligned}$$

Dále použijeme definici derivace

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{\delta x}{2}) \sin \frac{\delta x}{2}}{\delta x}.
\end{aligned}$$

Opět číslo 2 můžeme přesunout do jmenovatele, potom výraz v limitě má alternativní tvar:

$$-\frac{\sin(x + \frac{\delta x}{2}) \sin \frac{\delta x}{2}}{\delta x / 2} = -\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

Necháme-li δx klesat k nule, víme že

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1.$$

Dále víme, že

$$\lim_{\delta x \to 0} -\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) = -\sin x$$

Tak nakonec zjistíme, že
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Tím jsem si vysvětlili, jak derivujeme funkce $\sin x$ and $\cos x$ přímo z definice derivace.