Průběh funkce

V této jednotce si ukážeme jak postupovat při vyšetřování průběhu funkce. Předpokládáme znalost počítání derivací a limit, které jsou dobře popsány v předchozích letácích tohoto bloku.

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme podle následujících pravidel:

1. Určíme definiční obor funkce
2. Určíme sudost/lichost funkce a průsečíky s osami
3. Najdeme intervaly, na nichž je funkce ryze monotónní a určíme lokální extrémy.
4. Určíme inflexní body a intervaly na nichž je funkce konkávní resp. konvexní.
5. Najdeme asymptoty funkce, tj. přímky, ke kterým se funkce v nekonečnu limitně blíží.
6. Na závěr načrtneme graf vyšetřované funkce.

Až na malé výjimky známe téměř všechny početní postupy z dřívějších letáků, proto zde začneme rovnou příkladem, na kterém si objasníme celý postup.

Příklad. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{8x}{x^2+4}$.

Řešení. Postupně budeme procházet body 1-6.

1. **Určíme definiční obor**
   Definičním oborem jsou všechna reálná čísla $\mathbb{R}$, protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ má smysl hledat funkční hodnotu.

2. **Určíme sudost/lichost**
   Tento bod není vždy vyžadován při vyšetřování průběhu funkce. Ne vždycky totiž můžeme rozhodnout, zda je funkce sudá nebo lichá.

   Nový pojem 1: Sudost, lichost Funkce

   Funkce se nazývá sudá, jestliže pro všechna $x \in D(f) : f(x) = f(-x)$.
   Funkce se nazývá lichá, jestliže pro všechna $x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$.

   V našem příkladu je funkce lichá, neboť $f(-x) = -f(x)$. Tedy $\frac{8(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-8x}{x^2+4}$.

3. **Určíme intervaly monotonnosti a extrémy funkce**
   Tedy se nám jedná o to, na kterých intervalech je funkce rostoucí/klesající. Víme, že derivace je směrnicí tečny. Pro určení monotónnosti potřebujeme znát derivaci funkce $y = \frac{8x}{x^2+4}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(8x)'(x^2+4) - 8x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{8(x^2+4) - 8x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}. \tag{1}$$

Derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ položíme rovno nule. Je-li derivace v bodě rovna nule, pak je tečna grafu funkce v bodě rovnoběžná s osou x. To pro nás znamená, že se funkce může v takovém bodě měnit z rostoucí na klesající případně z klesající na rostoucí. Derivace z rovnosti 1 je rovna nule právě tehdy, když čitatel je roven nule. Stacionární boby hledáme tak, že řešíme rovnici

$$\begin{aligned} -8x^2+32 &= 0 \\ 8x^2 &= 32 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Máme dva body, ve kterých se může měnit monotónnost funkce a to

$$x_1 = -2 \qquad \text{a} \qquad x_2 = 2. \tag{2}$$

Je zřejmé, že musíme zkoumat tři intervaly pro vyšetření monotónnosti funkce.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(-2,\infty)$
$\frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}$	-	+	-
$y=\frac{8x}{(x^2+4)}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Pro hodnoty x z intervalu $(-\infty,-2)$ je derivace záporná a funkce je klesající. Pro hodnoty x z intervalu $(-2,2)$ je derivace kladná a funkce jen tomto intervalu rostoucí. Pro hodnoty x z intervalu $(-2,\infty)$ je derivace záporná a funkce na tomto intervalu opět klesající.

Dále je z tabulky patrné, že oba stacionární body, jsou lokální extrémy funkce a to v bodě $x_1=-2$ nastává lokální minimum a v bodě $x_2=2$ nastává lokální maximum.

4. Určíme inflexní body a intervaly konvexností příp. konkávnosti

Inflexní body určíme podobným způsobem jako body stacionární, jen s tím rozdílem, že položíme druhou derivaci rovno nule. Vypočítáme druhou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}\right)' = \frac{-16x(x^2+4)^2-(-8x^2+32)\cdot 2\cdot(x^2+4)2x}{(x^2+2)^4} = \tag{3}$$

$$= \frac{-16x^3-64x+32x^3-128x}{(x^2+2)^3} = \frac{16x(x^2-12)}{(x^2+2)^3}. \tag{4}$$

Inflexní body hledáme tak, že řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 16x(x^2-12) &= 0 \\ 16x = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2-12 &= 0 \\ x = 0 \qquad\qquad x^2 &= 12 \\ x &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Máme tři inflexní body $x_1=-2\sqrt{3}$, $x_2=0$ a $x_3=2\sqrt{3}$, budeme tedy určovat konvexnost resp. konkávnost na čtyřech intervalech

	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3}, 0)$	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$\frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$	-	+	-	+
$y = \frac{8x}{(x^2+4)}$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\frown$

Na intervalu $(-\infty, -2\sqrt{3})$ je funkční hodnota druhé derivace záporná, tedy zde je funkce y **konkávní**.
Na intervalu $(-2\sqrt{3}, 0)$ je funkční hodnota druhé derivace kladná, tedy zde je funkce y **konvexní**.
Na intervalu $(0, 2\sqrt{3})$ je funkční hodnota druhé derivace záporná, tedy zde je funkce y **konkávní**.
Na intervalu $(2\sqrt{3}, \infty)$ je funkční hodnota druhé derivace kladná, tedy zde je funkce y **konvexní**.

5. **Asymptoty funkce**

Asymptoty bez směrnice

Asymptoty bez směrnice nastávají v bodech, kde funkce má nevlastní limity, příp. jednostranné nevlastní limity. Ty určíme tak, že pro body, ve kterých není funkce definovaná, vypočítáme limitu zprava a limitu zleva. Je-li výsledkem $\pm\infty$, pak asymptotou je přímka $x = c$, (c- je bod kde neí funkce definovaná) která je rovnoběžná s osou y.

Tato funkce nemá asymptotu bez směrnice, neboť je definovaná na celém $\mathbb{R}$.

Asymptoty se směrnicí

Asymptota se směrnicí je obecně přímka $y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Nový pojem 2: Asymptoty se směrnicí

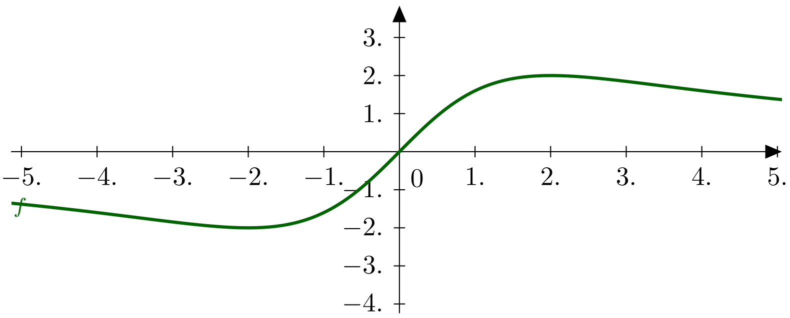
Asymptota je přímka $y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, kde směrnici a a posunutí b určíme následovně:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

Asymptota se směrnicí je **přímka** $y = 0$ neboť:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{x^3 + 4x} = 0, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{x^2 + 4} = 0.$$

6. **Graf funkce**



Uvedeme ještě několik řešených příkladů na průběh funkce, které nebudou doprovázeny tak rozsáhlým komentářem, jako u příkladu výše.

Příklad. Vyřešte průběh funkce $y = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$

Řešení. Opět budeme postupně řešit všech 6 bodů.

1. **Určíme definiční obor**
   $D(f) = (-2, 0) \cap (0, \infty)$, logaritmus není definován pro záporné hodnoty. Definiční obor je určen jako řešení nerovnice $\frac{x+2}{x^2} > 0$.

2. **Určíme sudost/lichost**
   Funkce není ani sudá a ani lichá, neboť $\ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$. Tímto jsme ukázali, že funkce nesplňuje podmínku ani sudosti ani lichosti.

3. **Určíme intervaly monotónnosti a extrémy funkce**
   První derivace funkce

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x+4}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

   Tento bod ale neleží v definičním oboru, funkce tedy nemá žádné lokální extrémy. Přesto řešíme monotónnost na intervalech dle definičního oboru.

	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

4. **Určíme inflexní body a intervaly konvexnosti příp. konkávnosti**
   Druhá derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{x^2+8x+8}{(x^2(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}.$$

   Jediným inflexním bodem je bod $x = -4+2\sqrt{2}$, protože bod $x4-2\sqrt{2}$ nenáleží definičnímu oboru.

	$(-2, -4+2\sqrt{2})$	$(-4+2\sqrt{2}, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	+	+
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

5. Asymptoty funkce

Asymptoty bez směrnice jsou přímky $x = -2$ a $x = 0$:

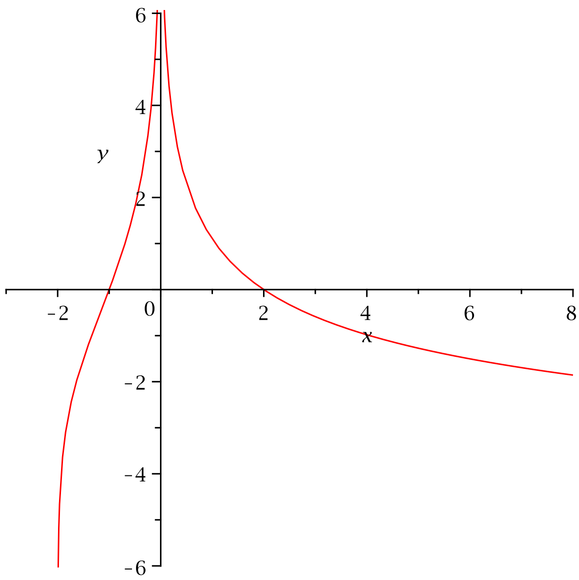
$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = \infty.$$

Užitečná poznámka. Nepočítáme limitu pro bod -2_-, protože ten nepatří do definičního oboru.

Asymptoty se směrnicí neexistují, neboť

$$a = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = -\infty.$$

6. Graf funkce



Příklad. Vyřešte průběh funkce $y = \text{arctg}\,(2x) - x$.

Řešení. Opět budeme postupně řešit všech 6 bodů.

1. Určíme definiční obor

$D(f) = \mathbb{R}$ obě funkce jsou definované pro všechny reálná čísla.

2. Určíme sudost/lichost

Funkce $y = \text{arctg}\,(2x) - x$ je lichá, protože je zřejmé, že obě funkce jsou liché.

3. Určíme intervaly monotónnosti a extrémy funkce

První derivace funkce

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{1+4x^2} - 1 = \frac{1-4x^2}{1+4x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

Máme tedy tři intervaly

	$(-\infty; -0,5)$	$(-0,5; 0,5)$	$(0,5; \infty)$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

4. Určíme inflexní body a intervaly konvexností příp. konkávnosti

Druhá derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -16\frac{x}{(1+4x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Jediným inflexním bodem je bod $x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2}$	+	-
$f(x)$	$\smile$	$\frown$

5. Asymptoty funkce

Asymptoty bez směrnice **neexistují**. Asymptoty se směrnicí jsou přímky $y_1 = -x + \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \infty$, a $y_2 = -x - \frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

$$a_1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} - 1\right) = -1, \qquad b_2 = \lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg}(2x) - x + x) = \frac{\pi}{2},$$

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} - 1\right) = -1, \qquad b_2 = \lim_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg}(2x) - x + x) = -\frac{\pi}{2}.$$

6. Graf funkce funkce