Funkce více proměnných

Funkce více proměnných je rozšířením pojmu funkce jedné proměnné. Připomeňme si, co je to funkce. Je to zobrazení, které bodu x přiřazuje jeho funkční hodnotu $y = f(x)$. Funkce více proměnných $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tedy přiřazuje uspořádané $n-tici$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ z $\mathbb{R}^n$ jejich hodnotu $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v množině reálných čísel $\mathbb{R}$.

Tematický příklad. Vzorec pro výpočet objemu kvádru $V = a \cdot b \cdot c$ je vlastně funkce tří proměnných $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ s funkčními hodnotami $V = f(a, b, c)$.

Definiční obor a obor hodnot

Množina, ze které zobrazujeme, se nazývá definiční obor $D(f)$. Pokud není specifikovaná, jsou to všechny prvky, které můžeme do funkce dosadit a funkce bude mít smysl. Obor hodnot $H(f)$ jsou všechny hodnoty, které funkce může nabývat.

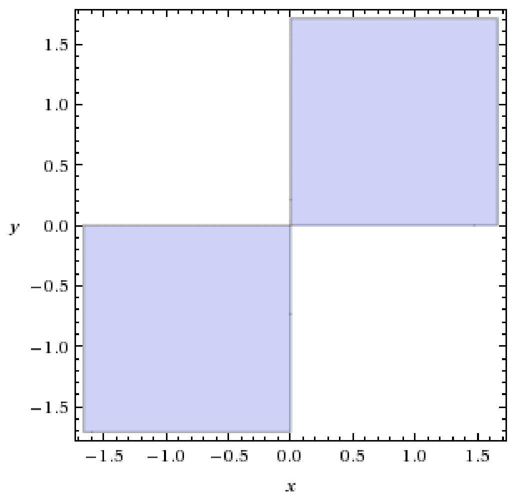
Tematický příklad. Co je definičním oborem a oborem hodnot následujících funkcí?

- $f(x, y) = x^2 + y^2$

  Definičním oborem je celý prostor $\mathbb{R}^2$. Oborem hodnot jsou nezáporná reálna čísla, neboť součet druhých mocnin bude vždy nezáporný.

- $f(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

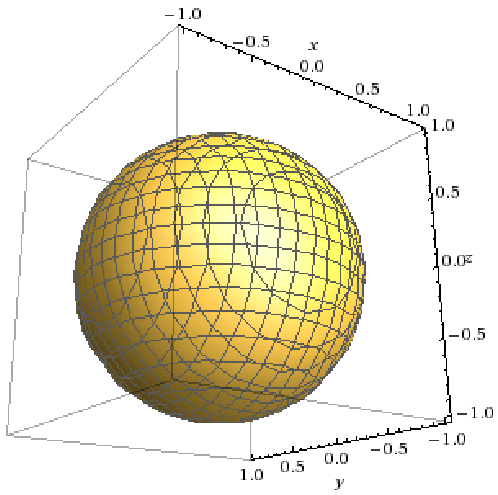
  Víme, že pod odmocninou nesmí být záporné číslo. To je možné v případe, kdy x i y jsou kladná, nebo naopak jsou obě záporná. Taky je přípustné, aby pod odmocninou byla 0, proto přichází v úvahu i možnost, že alespoň jedna z proměnných je 0 (nebo i obě). Definičním oborem je proto první a třetí kvadrant.



  Hodnoty funkce mohou být pouze kladná čísla nebo 0, čili $H(f) = [0, \infty)$.

- $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$

  Platí, že argument logaritmické funkce musí být kladný, což bude splněno právě tehdy, když $1 > x^2 + y^2 + z^2$. Tedy definičním oborem je jednotková koule se středem v počátku soustavy souřadnic.

  Obor hodnot je $H(f) = (-\infty, 0\rangle$.

Důležité tvrzení

Funkce n-proměnných je zobrazení $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ zobrazující množinu $D(f)$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Množinu $D(f)$ nazýváme **definičním oborem**. Všechny hodnoty, které funkce nabývá, tvoří **obor hodnot** $H(f)$ (nemusí se jednat o celou množinu $\mathbb{R}$).

Graf funkce více proměnných

V téhle části se zaměříme pouze na graf funkcí dvou proměnných, protože ve vyšších dimenzích si lze graf jen těžko představit. Grafem funkce dvou proměnných je podmnožina v $\mathbb{R}^3$, nejčastěji **plocha**. Graf je vlastně vyobrazením všech bodů (x, y) z definičního oboru funkce pomocí předpisu $z = f(x, y)$.

Bodů definičního oboru může být nekonečně mnoho a tedy sestrojit všechny jejich funkční hodnoty není možné. Proto k načrtnutí grafu využíváme **vrstevnice**. Ty nám napoví, jak bude graf vypadat.

Pojem vrstevnice jistě znáte z geografie - jako křivky spojující body se stejnou nadmořskou výškou. V matematice mají podobný význam, spojují body se stejnými funkčními hodnotami.

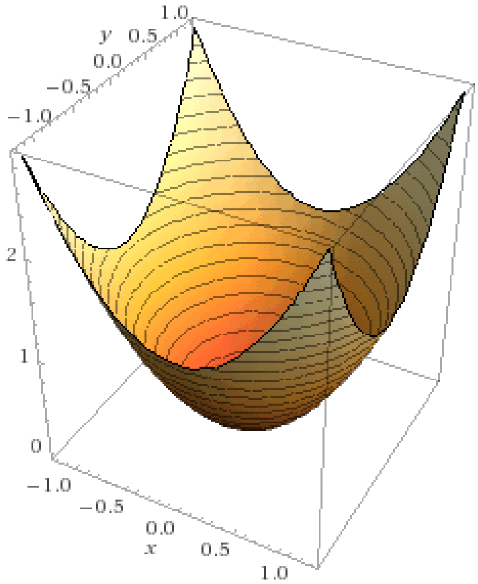
Důležité tvrzení

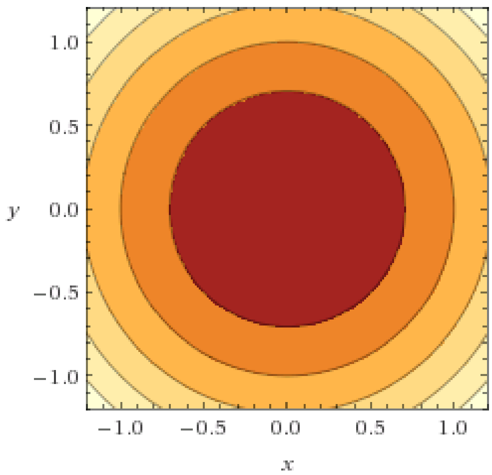
Vrstevnice funkce f o výšce k je množina bodů (x, y) ve kterých má funkce $z = f(x, y)$ konstantní hodnotu, t.j. $z = k$.

Tematický příklad. Sestrojme grafy následných funkcí:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$

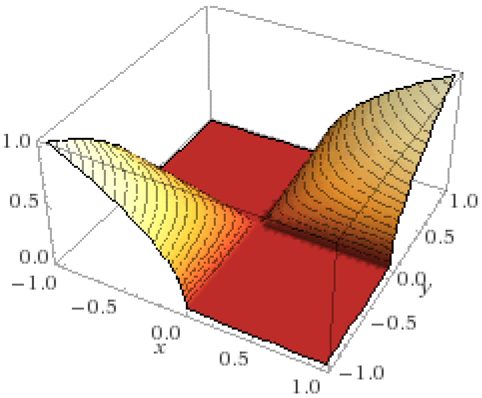
  K sestrojení grafu potřebujeme nejdříve vědět, jak budou vypadat vrstevnice funkce. Vrstevnicemi budou křivky odpovídající rovnici $x^2 + y^2 = k$. Jedná se tedy o kružnice s poloměrem $\sqrt{k}$.

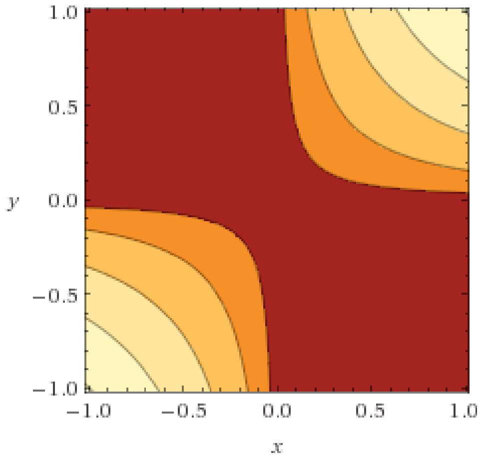
  

  Na obrázku vlevo vidíme vrstevnice znázorněné přímo na grafu funkce $f = -x^2 - y^2$, na obrázku vpravo je jejich průmět do roviny xy.

- $f(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$ Jak již bylo vzpomenuto, funkce je definována pouze v prvním a třetím kvadrantu. Proto taky graf a vrstevnice budou existovat jenom v těchto částech. Vrstevnice budou křivky odpovídající rovnici $\sqrt{xy} = k$, neboli $xy = k^2$. Budou to hyperboly ležící v prvním a třetím kvadrantu. Na obrázku níže jsou vlevo vyobrazené na grafu funkce a vpravo je jejich průmět do roviny xy.


1.0
0.5
0.0
−1.0
−0.5
0.0
x
0.5
1.0
−1.0
−0.5
0.0
y
0.5
1.0


1.0
0.5
y
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x