Limita funkce více proměnných

S pojmem limita jste se už setkali v části o funkci jedné proměnné. V tomhle letáku si objasníme, co limita znamená pro funkci více proměnných. Jak už víme, limita nám říká jak se funkce chová v okolí určitého bodu. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu $b \in \mathbb{R}$, jestli že se její funkční hodnota blíží k číslu b pokaždé když se blížíme k bodu a. (Přičemž bod a nemusí být ani bodem definičního oboru funkce, nemusí existovat hodnota $f(a)$) Zapisujeme to následovně

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Limita funkce v daném bodě nemusí existovat. Ovšem, když existuje, je nanejvýš jedna. Limity počítáme v tzv. **hromadných bodech**, a to z toho důvodu, abychom se mohli k danému bodu blížit. Bod a nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže každé jeho okolí obsahuje nějaký bod množiny M (jiný jako bod a). Hromadný bod množiny nemusí v množině M ležet. Představme si například množinu M jako kruh se středem v bodě a, bez bodu a. Navzdory tomu je a hromadným bodem M, neboť v každém jeho okolí leží nějaký bod z kruhu.

Výpočet limity

Existuje několik způsobů jak vypočítat limitu funkce. Nejjednodušší je dosazením, limita je pak funkční hodnota v daném bodě.

Tematický příklad.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2+8}{y-3} = \frac{12}{-2} = -6$$

Jestli výpočet takhle jednoduše nemůžeme provést, je zapotřebí funkci nějakým způsobem upravit.

Tematický příklad.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+xy+y^2) = 0$$

Tematický příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Provedeme algebraickou úpravu funkce. Výraz rozšíříme vhodným zlomkem.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 3(2+2) &= 12\end{aligned}$$

Další možnosti je důkaz neexistence limity. Neexistenci dokážeme tak, že různými způsoby najdeme různé hodnoty limity. A jak už víme, pokud má limita existovat, pak v daném bodě může být jenom jedna. Připomeňme si jak to bylo u funkce jedné proměnné. K danému bodu jsme se mohli blížit jenom ze dvou směrů a to zleva nebo zprava. Existovala-li limita v daném bodě, pak se jednostranné limity museli rovnat. Jestli byly rozdílné, limita v bodě neexistovala. Jenomže teď máme více možností jak se blížit k danému bodu, nejenom zleva nebo zprava, ale také po různých přímkách nebo křivkách.

Tematický příklad.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

K bodu $(0,0)$ se budeme blížit po přímkách $y = kx$, kde k je libovolné reálne číslo.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Jestli je k libovolné číslo, pak výsledkem může být nekonečně mnoho hodnot, podle zvoleného parametru. Proto není možné, aby limita existovala.

Limita a spojitost funkce

Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě (x_0,y_0),jestli

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Funkce je spojitá, když je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Tematický příklad. Zjistěte, zda-li je funkce spojitá. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Je potřeba prověřit spojitost v bodě $(0,0)$. K výpočtu limity zvolme postup blížení se po přímkách $y = kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{1}{1+k^2}$$

Výsledek závisí na parametru, proto limita neexistuje a funkce není spojitá.