Integrace pomocí substituce

Existují případy, kdy je možné vypočítat zdánlivě těžké integrály pokud nejprve provedeme substituci. To má za následek změnu proměnné a integrandu a v případě určitých integrálů se změní i jejich meze. V tomto letáku se setkáme s několika příklady integrálů, u kterých je vhodné použít substituci.

Za účelem zvládnutí zde vysvětlené metody je důležité projít mnoha praktickými cvičeními, aby se tato metoda stala naší druhou přirozeností.

Po přečtení tohoto textu, a shlédnutí příslušného videa souvisejícího s tímto tématem, bychom měli být schopni:

- provádět integraci pomocí substituce
- nalézt vhodnou substituci za účelem vypočtení integrálu

Obsah

1. Úvod 2

2. Integrace substitucí $u = ax + b$ 2

3. Nalezení $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí substituce $u = g(x)$ 6

I Úvod

Dovednost zvládnou integraci pomocí substituce je schopnost, která se vyvíjí současně s praxí a zkušeností. Z tohoto důvodu bychom měli projít všemi praktickými cvičeními. Uvědomme si, že někdy zdánlivě rozumná substituce nevede k integrálu, který jsme schopni vypočítat. Musíme proto být připraveni vyzkoušet alternativní substituce.

II Integrace pomocí substituce $u = ax + b$

Představme techniku na jednoduchých příkladech, pro které je vhodná lineární substituce.

Příklad. Předpokládejme, že chceme vypočítat integrál

$$\int (x+4)^5 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Již jsme obeznámeni s podobným integrálem $\int u^5 \,\mathrm{d}u$ a víme, že se tento integrál rovná $\frac{u^6}{6} + c$, kde c je integrační konstanta. To protože víme, že pravidlo pro integrování mocnin proměnných nám říká, abychom zvýšili exponent o 1 a poté tuto proměnnou vydělili nově vzniklým exponentem.

Integrál daný rovnicí (1) je také na pátou, ale integrand je více komplikovaný kvůli přítomnosti výrazu $x + 4$. Pro vyřešení tohoto problému použijeme **substituci** $u = x + 4$. Děláme to proto, abychom změnili integrand na mnohem jednodušší u^5. Nicméně se musíme postarat o to, abychom vhodně nahradili i výraz $\mathrm{d}x$.

V řeči diferenciálů máme

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x$$

Nyní, protože v našem případě je $u = x + 4$, okamžitě dostáváme, že $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$ a tedy $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Takže substitucí za $x + 4$ a $\mathrm{d}x$ v rovnici (1) obdržíme

$$\int (x+4)^5 \,\mathrm{d}x = \int u^5 \mathrm{d}u$$

Výsledný integrál může být okamžitě vypočítán a dává výsledek $\frac{u^6}{6} + c$. Můžeme se vrátit k výrazu obsahující původní proměnnou x uvědoměním si, že $u = x + 4$, pak dostaneme

$$\int (x+4)^5 \,\mathrm{d}x = \frac{(x+4)^6}{6} + c$$

Tímto jsme dokončili integraci pomocí substituce.

Příklad. Předpokládejme, že si přejeme nalézt integrál

$$\int \cos(3x+4) \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Všimněme si, že pokud nahradíme za $u = 3x + 4$, potom bude integrand obsahovat mnohem jednodušší podobu $\cos u$, což jsme schopni zintegrovat.

Stejně jako předtím

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

a tedy

$$\text{s } u = 3x + 4 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$$

následuje

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}x$$

Takže substitucí u za $3x+4$ a s $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}u$ v rovnici (2) máme

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+4)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3}\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\cdot\sin(u) + c\end{aligned}$$

Můžeme se vrátit k výrazu obsahující původní proměnnou x zpětným dosazením za $u = 3x+4$, tj.

$$\int \cos(3x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\sin(3x+4) + c$$

Tímto jsme dokončili integraci pomocí substituce.

Je velice jednoduché zobecnit výsledek předešlého příkladu. Chceme-li nalézt integrál funkce $\cos(ax+b)$ podle x, pak substituce $u = ax+b$ vede k $\frac{1}{a}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u$, což je rovno $\frac{1}{a}\cdot\sin(u)+c$ a po návratu k substituci $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$. Podobný argument, který bychom měli vyzkoušet, ukazuje, že $\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b)+c$.

Poznámka.

$$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b)+c \qquad\qquad \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b)+c$$

Příklad. Předpokládejme, že chceme nalézt

$$\int \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x.$$

Provedeme substituci $u = 1-2x$ za účelem zjednodušení integrandu na $\frac{1}{u}$. Připomeňme si, že integrál funkce $\frac{1}{u}$, vzhledem k u, je přirozený logaritmus u, tj. $\ln|u|$. Stejně jako dříve

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

a tedy

$$\text{s} \quad u = 1-2x \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2$$

Potom

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}x$$

Integrál se změní na

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}u\right) &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\cdot \ln|u| + c \\ &= -\frac{1}{2}\cdot \ln|1-2x| + c\end{aligned}$$

Výsledek předešlého příkladu lze zobecnit: chceme-li nalézt $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x$, pak použití substituce $u = ax + b$ vede k $\frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ což je rovno $\frac{1}{a}\cdot \ln|ax+b| + c$.

To znamená, že pokud čelíme například integrálu $\int \frac{1}{3x+7}\,\mathrm{d}x$, můžeme okamžitě napsat odpověď ve tvaru $\frac{1}{3}\cdot \ln|3x+7| + c$.

Poznámka.

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot \ln|ax+b| + c$$

Trochu více musíme dávat pozor, když pracujeme s mezemi určitých integrálů. Uvažujme následující příklad.

Příklad. Předpokládejme, že hledáme

$$\int_1^3 (9+x)^2\,\mathrm{d}x$$

Provedeme substituci $u = 9 + x$ a stejně jako dříve

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

a tedy

$$\text{s} \quad u = 9 + x \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

Pak následuje

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

Integrál se změní na

$$\int_{x=1}^{x=3} u^2\,\mathrm{d}u$$

zdůrazněme, že jsme meze integrálu zapsali jako hodnoty proměnné x a nikoli u. Tyto meze můžeme zapsat jako hodnoty u použitím substituce $u = 9 + x$. Přesně, pro $x = 1$ je $u = 10$ a pro $x = 3$ je $u = 12$. Tedy

$$\begin{aligned}\int_{u=10}^{u=12} u^2\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{1}{3}\cdot u^3\right]_{10}^{12}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(12^3-10^3\right)\\ &= \frac{728}{3}\end{aligned}$$

Všimněme si, že v tomto případě není nutné převádět výsledek z u nazpět do původní proměnné x. Je to proto, že jsme převedli meze integrálu z původní proměnné x do nové proměnné u.

Cvičení 1.

1. V každém případě použijte substituci k nalezení integrálu:

   (a) $\int(x-2)^3\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1(x+5)^4\mathrm{d}x$ (c) $\int(2x-1)^7\mathrm{d}x$ (d) $\int_{-1}^1(1-x)^3\mathrm{d}x$.
2. V každém případě použijte substituci k nalezení integrálu:

   (a) $\int\sin(7x-3)\mathrm{d}x$ (b) $\int \mathrm{e}^{3x-2}\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(1-x)\mathrm{d}x$ (d) $\int\frac{1}{7x+5}\mathrm{d}x$.

Příklad. Předpokládejme, že chceme nalézt integrál

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

V tomto příkladě provedeme substituci $u=1+x^2$ za účelem zjednodušení argumentu druhé odmocniny. Můžeme vidět, že o zbytek integrandu $2x\,\mathrm{d}x$ se automaticky postará proces substituce, protože výraz $2x$ je derivací naší substituce, tj. funkce $u=1+x^2$.

Stejně jako dříve

$$\mathrm{d}u=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

a tedy

$$u=1+x^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x$$

Potom

$$\mathrm{d}u=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=2x\,\mathrm{d}x$$

Takže substitucí u za $1+x^2$ a $2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ v rovnici (3) obdržíme

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+c\end{aligned}$$

Můžeme se vrátit k vyjádření obsahující původní proměnnou x zpětným dosazením $u = 1 + x^2$, což nám dává

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

Tímto jsme dokončili integraci pomocí substituce.

Pojďme zanalyzovat tento příklad trochu více srovnáním integrandu s obecným případem $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Předpokládejme, že zapíšeme

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad \text{a} \qquad f(u) = \sqrt{u}$$

Potom označme složením[1] funkcí f a g funkci $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

Dále pokud označíme $g(x) = 1 + x^2$ pak $g'(x) = 2x$. Tedy integrál

$$\int 2x \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{je ve tvaru} \qquad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Aby bylo možné provést integraci, použijeme substituci $u = 1 + x^2$. V tomto obecném případě by bylo vhodné se pokusit položit $u = g(x)$. Potom $\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = g'(x)\mathrm{d}x$.

Po provedení substituce se výsledný integrál stává integrálem $\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$ a v obecném případě $\int f(u)\,\mathrm{d}u$. Za předpokladu, že lze nalézt tento konečný integrál, je problém vyřešen.

Pro srovnání jsou zde vedle sebe prezentovány konkrétní a obecný případ:

$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$
nechť $u = 1 + x^2$	nechť $u = g(x)$
$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = g'(x)\,\mathrm{d}x$
$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$
$= \frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + c$	
$= \frac{2}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$	

Poznámka. Pro výpočet

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

je vhodná substituce $u = g(x)$ a $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$, to nám dává

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Integrace je pak provedena s ohledem k proměnné u, až poté se navrátíme k původní proměnné x.

[1] při skládání funkcí f a g se postupuje tak, že výstup vnitřní funkce g slouží současně jako vstup pro vnější funkci f, což vede k výsledku $f(g(x))$

Je třeba zdůraznit, že integrace pomocí substituce je něco jako umění a vaše dovednost se zlepší s praxí. Kromě toho, substituce, která na první pohled vypadá rozumně, nemusí vést nikam. Pokud například zkusíme nalézt $\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$, a jako substituci použijeme $u = 1 + x^2$, ocitli bychom se ve slepé uličce. Buďme tedy připraveni vytrvat a zkoušet odlišné přístupy.

Příklad. Předpokládejme, že si přejeme vypočítat

$$\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

Přepsáním integrandu na $\frac{1}{\sqrt{2\cdot x^2+1}} \cdot 4x$ si všimneme, že nabývá podoby $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$, kde $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$, $g(x) = 2x^2 + 1$ a $g'(x) = 4x$. Substituce $u = g(x) = 2x^2 + 1$ změní integrál na

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Ten vypočteme a získáme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &= \int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} + c\end{aligned}$$

Nakonec použitím $u = 2x^2 + 1$ se vrátíme k původní proměnné x

$$\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 2(2x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

nebo po úpravě

$$2\sqrt{2x^2+1} + c$$

Příklad. Předpokládejme, že chceme nalézt $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Uvažujme substituci $u = \sqrt{x}$. Potom

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

tedy

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}2\int \sin(u)\,\mathrm{d}u &= -2\cos(u) + c \\ &= -2\cos(\sqrt{x}) + c\end{aligned}$$

Můžeme také provést následující pozorování:
integrand můžeme zapsat ve tvaru $\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Zapsáním $f(u)=\sin(u)$ a $g(x)=\sqrt{x}$ potom platí $g'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Dále $f(g(x))=\sin(\sqrt{x})$.
Proto zapíšeme daný integrál jako

$$2\int\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

který odpovídá tvaru

$$2\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

s funkcemi f a g zadanými výše. Stejně jako dříve, substituce $u=g(x)=\sqrt{x}$ vytvoří integrál

$$2\int f(u)\,\mathrm{d}u=2\int\sin(u)\,\mathrm{d}u,$$

ze kterého

$$\begin{aligned}2\int\sin(u)\,\mathrm{d}u &= -2\cos(u)+c\\ &= -2\cos(\sqrt{x})+c\end{aligned}$$

Cvičení 2.

1. V každém případě může být integrand zapsán jako $f(g(x))\cdot g'(x)$. Určete funkce f a g a použijte obecný výsledek ze strany 6 k výpočtu integrálu.
   (a) $\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2-5}\mathrm{d}x$ (b) $\int -2x\sin(1-x^2)\mathrm{d}x$ (c) $\int\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x$.
2. V každém případě vypočítejte integrál pomocí zadané substituce:
   (a) $\int -2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad u=-x^2$.
   (b) $\int x\sin(2x^2)\mathrm{d}x,\quad u=2x^2$.
   (c) $\int_0^5 x^3\sqrt{x^4+1}\mathrm{d}x,\quad u=x^4+1$.
3. V každém případě použijte vhodnou substituci k výpočtu integrálu.

(a)	$\int 5x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$	(b)	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$	(c)	$\int x^4(1+x^5)^3\mathrm{d}x$
(d)	$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^4+16}}\mathrm{d}x$	(e)	$\int\frac{\cos(x)}{(5+\sin(x))^2}$	(f)	$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^4+12}}\mathrm{d}x$
(g)	$\int 5x^2\sqrt{1-x^3}\mathrm{d}x$	(h)	$\int\mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x$	(i)	$\int\mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Odpovědi ke cvičením

Cvičení 1.

1. (a) $\frac{(x-2)^4}{4}+c$ (b) $\frac{4651}{5}=930\frac{1}{5}$
   (c) $\frac{(2x-1)^8}{16}+c$ (d) 4.
2. (a) $-\frac{\cos(7x-3)}{7}+c$ (b) $\frac{\mathrm{e}^{3x-2}}{3}+c$ (c) 1,382 (d) $\frac{1}{7}\cdot\ln|7x+5|+c$

Cvičení 2.

1. (a) $f(u) = \mathrm{e}^u$, $g(x) = x^2 - 5$, $\mathrm{e}^{x^2-5} + c$,
   (b) $f(u) = \sin(u)$, $g(x) = 1 - x^2$, $-\cos(1-x^2) + c$
   (c) $f(u) = \frac{1}{u}$, $g(x) = 1 + \sin(x)$, $\ln|1 + \sin(x)| + c$.

2. (a) e^{-x^2}+c (b) $-\frac{\cos(2x^2)}{4} + c$ (c) 2610 .

3. (a) $-\frac{5}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $-\frac{2}{1+\sqrt{x}} + c$ (c) $\frac{1}{20}(1+x^5)^4 + c$
   (d) $\frac{1}{2}(x^4+16)^{\frac{1}{2}} + c$ (e) $-\frac{1}{5+\sin(x)} + c$ (f) 0,0707
   (g) $-\frac{10}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}} + c$ (h) $-\mathrm{e}^{\cos(x)} + c$ (i) $\mathrm{e}^{\sin(x)} + c$.