Určitý integrál

V tomto článku se budeme věnovat určitému integrálu, který dané funkci přiřazuje číslo. Myšlenka integrování pochází z geometrických požadavků - zjišťování povrchů, objemů a délek geometrických útvarů. To znamená, že se omezujeme jen na nějakou část (pozn. tím máme na mysli interval) funkce, která je základem geometrického útvaru.

Obsah

Úvod

Určitý integrál má využití ve velkém množství aplikací. Pomocí určitého integrálu můžeme počítat obsahy ploch, délky křivek, objemy a pláště rotačních těles, statické momenty rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště. Velké množství aplikací naleznete ve fyzice (výpočet rychlosti, dráhy, práce, ...). Další aplikace naleznete v ekonomice, financích, pravděpodobnosti a statistice a v mnoha dalších oborech.

Existuje několik přístupů, jak vybudovat pojem určitý integrál a tomu odpovídá několik druhů určitých integrálů (Newtonův, Riemannův, Lebesgueův). Podle způsobu zavedení se mění třída integrovatelných funkcí. Dnes bývá obvyklé používat definici, jak ji zavedl významný německý matematik B. Riemann (1826 – 1866). Potřeba vybudování tohoto pojmu vychází z potřeb řešení geometrických problémů a problémů klasické mechaniky. Množina funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu je dostatečně široká pro inženýrskou praxi. Způsob zavedení je východiskem pro numerické výpočty určitých integrálů.

Definice určitého integrálu

Tato kapitola obsahuje teorii, která je užitečná k celkovému pochopení tématu, avšak není nutná pro řešení konkrétních příkladů (pouze pro zvídavé studenty).

Nový pojem

Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ *integrovatelná (schopná integrace)*, je-li na něm ohraničená a aspoň po částech spojitá (má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti (body nespojitosti 1. druhu)).

Definice určitého integrálu je poměrně složitá. K pojmu určitý integrál dospějeme následujícím postupem:

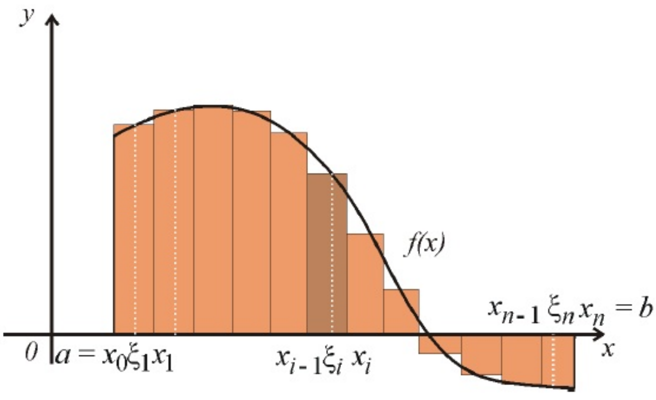
1. Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n dílčích intervalů. Množinu dělících bodů $D_n = x_0, x_1, \dots, x_n$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, nazveme dělením intervalu $\langle a, b\rangle$ na n intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

   Číslo $\nu(D_n) = max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$ budeme nazývat normou dělení D_n. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu v daném dělení. Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být více, případně mohou být intervaly stejně dlouhé (ekvidistantní body). Norma dělení charakterizuje, jak je dělení jemné.

2. V každém dílčím intervalu dělení D_n vybereme jeden bod $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$. Množinu těchto bodů $R_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ budeme nazývat výběrem reprezentantů příslušných k dělení D_n.

3. Pro dané dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ a výběr reprezentantů R_n vytvoříme součet $\sigma(f, D_n, R_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Tato suma se nazývá integrálním součtem funkce f nebo také Riemannův součet. Geometrický význam tohoto součtu je znázorněn na Obrázku 1. Jedná se vlastně o součet obsahů obdélníků se základnami $(x_i - x_{i-1})$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Je zřejmé, že pro $f(\xi_i) < 0$ bude hodnota pro daný obdélník záporná. Označení $\sigma(f, D_n, R_n)$ znamená, že integrální součet závisí na funkci f, na konkrétním dělení D_n a na výběru reprezentantů R_n.

4. Budeme vytvářet integrální součty pro stále jemnější dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ při libovolných výběrech reprezentantů R_n. Pokud bude existovat limita integrálních součtů $\sigma(f, D_n, R_n)$ pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ nezávisle na výběrech reprezentantů, nazveme ji určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 1. Integrální součet funkce f.

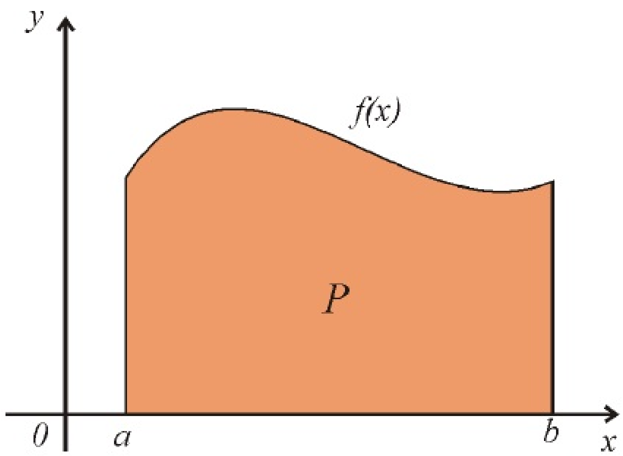
Nový pojem

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, D_n je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a R_n výběr reprezentantů. Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná* na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$lim_{n\to\infty}\,\sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, pro kterou platí $lim_{n\to\infty}\,\nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo I nazýváme *určitý (Riemannův) integrál* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a píšeme $I = \int_a^b f(x)dx$.
Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez*, interval $\langle a, b\rangle$ *integrační obor* a funkci f *integrand.*

Je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak geometrickým významem určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je obsah "křivočarého lichoběžníka"ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (Obrázek 2).



Obrázek 2. Křivočarý lichoběžník.

Užitečná poznámka. Zápis neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ a určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je formálně velmi podobný. U určitého integrálu jsou pouze navíc integrační meze. To má za následek, že je studenti považují prakticky za stejné. Určitý a neurčitý integrál se však zásadně liší! Výsledkem neurčitého integrálu je funkce (množina funkcí), výsledkem určitého integrálu je číslo.

Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

V této části uvedeme základy integrálního počtu funkce jedné proměnné a základní vlastnosti určitého (Riemannova) integrálu, které budeme dále běžně používat při praktických výpočtech.

Důležité tvrzení 1: Newton – Leibnitzův vzorec

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tématický příklad. Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte $\int\limits_0^1 (2x - x^2)dx$.

Nejdřív spočítáme primitivní funkci k funkci $f(x) = (2x - x^2)dx$.
Dostaneme $F(x) = \int (2x - x^2)dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + c$.
Potom podle Newton - Leibnitzova vzorce

$$\int\limits_0^1 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + c\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3} + c\right) - (0 - 0 + c) = \left(\frac{2}{3} + c\right) - c = \frac{2}{3}.$$

Vidíme, že integrační konstantu c při výpočtu určitého integrálu v bodě b přičteme a v bodě a zase odečteme, proto ji dále nebudeme ve výpočtech uvádět.

Tématický příklad. Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte $\int\limits_0^2 3^x dx$.

$$\int\limits_0^2 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} + c\right]_0^2 = \left(\frac{3^2}{\ln 3} + c\right) - \left(\frac{3^0}{\ln 3} + c\right) = \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{3^2 - 1}{\ln 3} = \frac{8}{\ln 3}.$$

Důležité tvrzení 2

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Důležité tvrzení 3: Aditivita a homogenita vzhledem k integrandu

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a c je libovolná konstanta. Pak platí

a)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

b)

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

Funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ je spojitá pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= [x]_0^1 - [\arctan x]_0^1 = 1 - 0 - \arctan 1 + \arctan 0 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\, dx$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2}{2}\sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2x)}{2} + c\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\cos\pi}{2} + c\right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} + c\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Důležité tvrzení 4: Aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a c je libovolné reálné číslo takové, že $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tématický příklad. Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-3}^1 |x|dx$.

Při hledání primitivní funkce k funkci $|x|$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$ bude nutno přistoupit k rozdělení tohoto intervalu na dvě části. Dělícím bodem bude bod 0. Potom

$$\int\limits_{-3}^1 |x|dx = \int\limits_{-3}^0 -x\, dx + \int\limits_0^1 x\, dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = 0 - \left(-\frac{(-3)^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2}{2}\right) - 0 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

Cvičení 1

Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte určité integrály:

a) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{1}{x}dx$; b) $\int\limits_{-1}^{1} e^x dx$; c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx$; d) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$.

Integrování metodou substituce a per partes

Důležité tvrzení 5: Integrování per partes

Jsou-li $u'(x)$ a $v'(x)$ spojité v $\langle a, b\rangle$ (potom jsou také $u(x)$ a $v(x)$ spojité v $\langle a, b\rangle$), pak

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx.$$

Jinak psáno:

$$\int_a^b v\,du = [uv]_a^b - \int_a^b u\,dv.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^2 (x^2-x)e^x dx$.

$$\int_0^2 (x^2-x)e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x^2 - x \\ u = e^x & v' = 2x-1 \end{array} \right| = \left[(x^2-x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (2x-1)e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = 2x-1 \\ u = e^x & v' = 2 \end{array} \right| = [(4-2)e^2 - 0] - [(2x-1)e^x]_0^2 + \int_0^2 2e^x dx =$$

$$= 2e^2 - [3e^2 + e^0] + 2[e^x]_0^2 = -e^2 - 1 + 2(e^2 - e^0) = e^2 - 3.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_1^e \ln x dx$.

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx = (e\ln e - \ln 1) - [x]_1^e =$$

$$= (e-0) - (e-1) = 1.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$.

$$\int_0^\pi x\sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{array} \right| = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

Cvičení 2

Vypočtěte integrály:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$ b) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$ c) $\int\limits_1^e x^3 \ln x dx$ d) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$

e) $\int\limits_1^e x\ln^2 x dx$ f) $\int\limits_{-1}^1 \ln(x+2) dx$ g) $\int\limits_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$ k) $\int\limits_0^\pi e^{-x}\sin^2 x dx$

Důležité tvrzení 6: Integrování substituci, případ a

Nechť funkce $f(x)$ má tvar $f(x) = g(h(x))h'(x)$, kde $h'(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a $g(z)$ je spojitá pro všechna $z = h(x)$, pokud $x \in \langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(h(x))h'(x)dx = \int_h (a)^h(b)g(z)dz.$$

Tématický příklad. Vypočtěme integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos(x)\,dx$.

Zřejmě funkce $\sin^3(x)\cos(x)$ má tvar $g(h(x))h'(x)$, kde $h(x) = \sin x$, $g(z) = z^3$. Substitucí $\sin x = z$ tedy bude

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int\limits_0^1 z^3 dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Tématický příklad. Vypočtěme integrál $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$.

Zřejmě funkce $x\sqrt{4-x^2}$ skoro má tvar $g(h(x))h'(x)$, kde $h(x) = 4 - x^2$, $g(z) = \sqrt{z}$. Substitucí $4 - x^2 = z$ tedy bude

$$\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = \int\limits_4^0 -\frac{1}{2}\sqrt{z}dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 z^{1/2}dz = \frac{1}{2}\left[\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{z^3}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(\sqrt{4^3}-\sqrt{0}) = \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{8}{3}.$$

Důležité tvrzení 7: Integrování substituci, případ b

Nechť $A \le a < b \le B$, nechť funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle A, B\rangle$, $\varphi'(z)$ je spojitá v $\langle \alpha, \beta\rangle$ a nechť pro $z \in \langle \alpha, \beta\rangle$ leží $\varphi(z)$ v intervalu $\langle A, B\rangle$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz.$$

Tématický příklad. Vypočtěme integrál $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Použijeme substituce $x = \sin z$. Zvolíme $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Pak bude jistě $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Předpoklady věty jsou splněny a je

$$\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 z}\cos z dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2z)dz = \frac{1}{2}\left[z + \frac{\sin 2z}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

(Je $\sqrt{1-\sin^2 z} = +\cos z$, neboť $\sqrt{1-\sin^2 z}$ je nezáporné číslo a $\cos z \geq 0$ pro $z \in< -\pi/2, \pi/2 >$.)

Tématický příklad. Vypočtěme integrál $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

Použijeme substituce $\ln x = z$. Zvolíme $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Předpoklady věty jsou splněny a je

$$\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int\limits_0^1 (1+z)dz = \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - (0+0) = \frac{3}{2}.$$

Cvičení 3

Vypočtěte integrály:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}dx$ b) $\int\limits_0^1 x(2x^2-1)^{10}dx$ c) $\int\limits_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x dx$ d) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

e) $\int\limits_0^{\pi/4} tg^3 x dx$ f) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$ g) $\int\limits_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}dx$ k) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}dx$

Odpovědi na cvičení

Cvičení 1

a) $-\ln 2$; b) $\frac{e-1}{e}$; c) 0; d) -1.

Cvičení 2

a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; c) $\frac{1}{16}(3e^4+1)$; d) $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\frac{1}{4}(e^2-1)$; f) $3\ln 3 - 2$; g) $\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})$; k) $\frac{3}{5}(e^{-\pi}-1)$.

Cvičení 3

a) 0; b) $\frac{1}{22}$; c) $e - \frac{1}{e}$; d) $\frac{1}{2}$;

e) $\frac{1-\ln 2}{2}$; f) $\frac{\ln 3}{2}$; g) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; k) $1 + \frac{\pi}{2}$.