Úvod do posloupností

V tomto letáku se zaměříme na posloupnosti. Seznámíme se s tím, co to je posloupnost, jak ji lze značit a se způsoby zadání. Dále se pak podíváme na některé vlastnosti, které nás u posloupností zajímají.

Co je to posloupnost?

Posloupnost je určité pravidlo, podle kterého přiřazujeme přirozeným číslům jiná čísla, která nemusí nutně být přirozená.

Tématický příklad. Vezměme si posloupnost čísel

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}.$$

Vidíme, že tato posloupnost je tvořena pouze lichými čísly nebo můžeme říci, že každý následující člen je o 2 větší, než jeho předchůdce. Snadno jsme rozpoznali pravidlo, které stanovuje členy posloupnosti a podle tohoto pravidla můžeme sestavit tabulku

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 5 \\ 4 & \to & 7 \\ 5 & \to & 9 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

První sloupec značí pořadí člene posloupnosti a druhý nám říká, jaká je jeho hodnota. Tuto tabulku můžeme chápat jako zobrazení, kde se číslo z prvního sloupce zobrazí na číslo ve druhém sloupci. Například číslo 2 se zobrazí na číslo 3, číslo 5 na číslo 9 atd.
Zůstaneme-li u zobrazení, pak můžeme říci, že posloupnost a je zobrazení přirozených čísel do množiny čísel reálných, tj. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Důležitá poznámka
Posloupnost je každé zobrazení a, jehož definičním oborem jsou přirozená čísla a oborem hodnot je část množiny reálných čísel. Tedy $\mathcal{D}(a) = \mathbb{N}$ a $\mathcal{H}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Stejně jako u přirozených čísel je přesně stanoveno, jak jdou po sobě, tak i posloupnost má pevně stanovené pořadí.

Tématický příklad. Uvažujme posloupnosti

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \text{ a } \{1, 5, 3, 7, 9, \dots\}.$$

Pokud sestavíme tabulky pro obě posloupnosti jako v předešlém příkladě, obdržíme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & 1 & \quad & 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 & & 2 & \to & 5 \\ 3 & \to & 5 & & 3 & \to & 3 \\ 4 & \to & 7 & & 4 & \to & 7 \\ 5 & \to & 9 & & 5 & \to & 9 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Druhý řádek nám ukazuje, že v případě první posloupnosti je druhý člen číslo 3 a v případě druhé posloupnosti je to číslo 5. Jinými slovy se u první posloupnosti zobrazí číslo dvě na číslo 3 u druhé na číslo 5. Kvůli tomu se nejedná o stejné posloupnosti a na pořadí opravdu záleží.

Užitečná poznámka. U posloupností je přesně stanovené pořadí prvků, jejich záměnou obdržíme také posloupnost, která se však od naší původní může lišit.
Je důležité neplést si posloupnosti a množiny. V případě množin na pořadí prvků "ve svorkách" nezáleží.

Značení posloupností

Výše jsme si řekli, že posloupnost je druhem zobrazení, která obvykle značíme $f(n)$ nebo v našem případě bychom je značili $a(n)$. Přesto se u těchto speciálních zobrazení dělá výjimka a posloupnosti značíme a_n. V různé literatuře, či na internetu, se můžeme setkat i se značením jiným, jako je například: (a_n), $\{a_n\}$, případně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zadání posloupnosti

V předešlých příkladech jsme se již setkali se zadáním posloupnosti. Uvedenému způsobu říkáme **pomocí výčtu členů.** Správně bychom měli říci, že jsme zadali posloupnosti pomocí výčtu prvních několika členů, protože všechny doposud uvedené posloupnosti byly nekonečné a sestavit úplný výčet je nemožný úkol.

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, ale mohou být zadány více způsoby. Zde si uvedeme všechny způsoby zadání a později k nim uvedeme i příklady.

- **Výčtem členů,** např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,** např. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$ nebo $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro n-tý člen,** např. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = n!$, $a_n = (-1)^n$

S výčtem členů jsme už seznámeni a proto se zaměříme na zbylé dva způsoby. V případě rekurentního zadání určujeme konkrétní člen pomocí znalosti předchozího člene (respektive členů).

Rekurentní vzorec

Vrátíme se k příkladu $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$. Zde máme zadáno jak se počítá $n+1$ člen a známe člen první a_1. Pokud dosadíme do vzorce $n = 1$, pak obdržme

$$a_{1+1} = a_1 + 2$$

$$a_2 = a_1 + 2.$$

Nyní je snadné dosadit za člen $a_1 = 1$ a získáme tak druhý člen posloupnosti a_2

$$a_2 = 1 + 2 = 3$$

Stejným způsobem můžeme určit třetí člen, stačí pouze zvolit hodnotu n tak, abychom na levé straně rovnosti získali a_3. Na první pohled je jasné, že musíme zvolit $n = 2$, potom

$$a_{2+1} = a_2 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

Hodnotu člene a_2 známe a proto ji dosadíme a dopočítáme člen a_3

$$a_3 = 3 + 2 = 5$$

Tento postup můžeme opakovat donekonečna, obvykle se ale zastavíme, až najdeme člen, který nám určuje zadání příkladu. Pokud bychom tedy hledali dvanáctý člen posloupnosti a_{12}, potřebujeme znát předešlý člen a_{11}. Pro nalezení člene a_{11} musíme znát člen a_{10} atd. Postupně bychom se zastavili až na členu, jehož hodnotu známe a pomocí něhož jsme schopni dopočítat ostatní členy.

Druhý příklad je založený na stejném principu, rozdíl tkví pouze v tom, že pro výpočet nějakého člene potřebujeme znát dva předchozí.

Explicitní vzorec

Uvažujme například posloupnost $a_n = \frac{1}{n^2}$. Chceme-li určit hodnotu nějakého člene této posloupnosti, pouze dosadíme jeho pořadí za n do explicitního vzorce. Kupříkladu by nás mohl zajímat pátý člen této posloupnosti. Pro jeho určení dosadíme za n číslo 5.
Z toho hned vidíme, že

$$a_5 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

Kdybychom chtěli znát desátý člen, dosadili bychom $n = 10$ a obdrželi, že $a_{10} = \frac{1}{100}$, atd. Stejným způsobem určíme libovolný další člen.
Nespornou výhodou zadání pomocí explicitního vzorce je ta, že jsme schopni rychle určit konkrétní člen posloupnosti a není k tomu zapotřebí znalost jiných členů, jako je tomu například u rekurentního zadání.

Vlastnosti posloupností

Již jsme řekli, že posloupnost je speciálním druhem zobrazení jehož definičním oborem jsou přirozená čísla (nebo jejich část). Není proto takovým překvapením, že posloupnosti mohou mít některé vlastnosti, jaké jsme pozorovali u zobrazení.

Monotonie

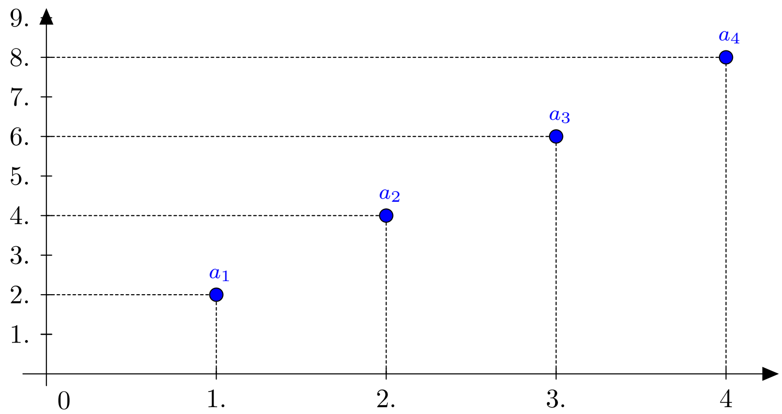
S pojmem monotonie jsme se setkali již u funkcí. Vypovídá o tom, zda funkce má tendenci svou funkční hodnotu zvyšovat, zmenšovat nebo se nemění. Stejně je tomu tak i u posloupností jejichž hodnota s každým dalším členem roste, klesá nebo zůstává stejná. I zde rozlišujeme tyto případy:

- rostoucí,

- klesající,
- neklesající,
- nerostoucí,

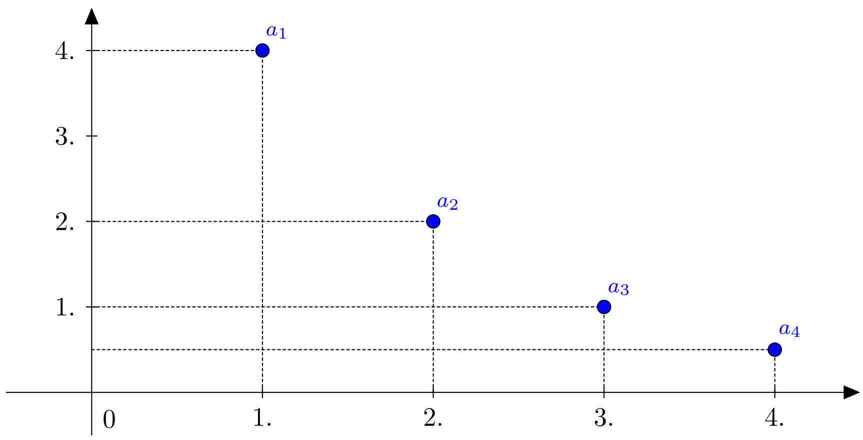
případně posloupnost není monotonní. Příkladem takové posloupnosti je $a_n = (-1)^n$.
Dále se budeme odkazovat na obecnou posloupnost a_n se členy $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Rostoucí posloupnost: je posloupnost, u které má každý následující člen vyšší hodnotu, než ten předchozí. Platí, že pro každé $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ je $a_i < a_j$.
Například posloupnost $a_n = 2 \cdot n$.



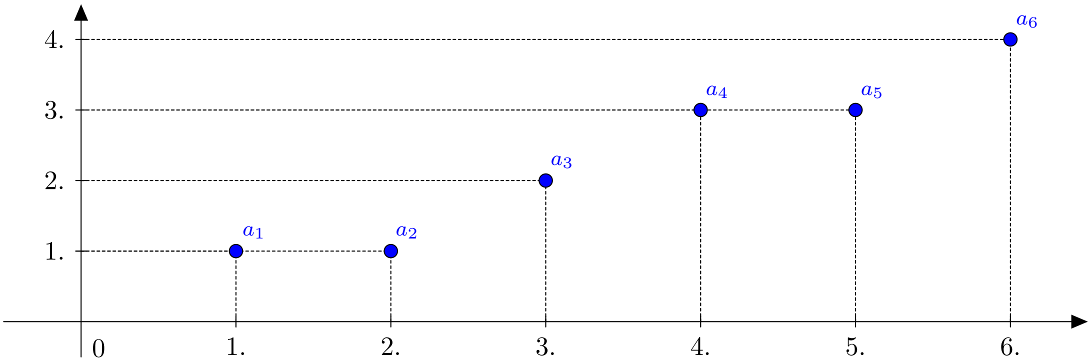
První čtyři členy posloupnosti $a_n = 2 \cdot n$.

Klesající posloupnost: je posloupnost, u které má každý následující člen nižší hodnotu, než ten předchozí. Platí, že pro každé $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ je $a_i > a_j$.
Například posloupnost $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 4$.



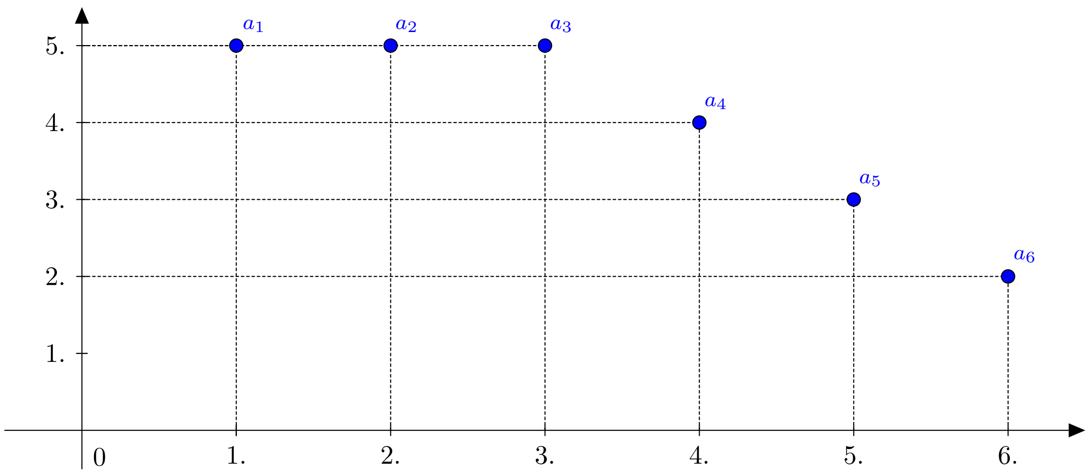
První čtyři členy posloupnosti $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 4$.

Neklesající posloupnost: je taková posloupnost, u které má každá člen hodnotu vyšší nebo stejnou jako jeho předchůdce. Platí, že pro každé $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ je $a_i \leq a_j$.
Například posloupnost $a_n = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, \dots\}$.



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, \ldots\}$.

Nerostoucí posloupnost: je taková posloupnost, u které má každý další člen hodnotu nižší nebo stejnou jako jeho předchůdce. Platí, že pro každé $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ je $a_i \geq a_j$.
Například posloupnost $a_n = \{5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \ldots\}$.



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \ldots\}$.

Cvičení 1: Určete monotonii následujících posloupností:

1) $a_n = \{5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, \ldots\}$ 2) $a_n = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ 3) $a_n = \{-5, -3, -1, 1, \ldots\}$
4) $a_{n+1} = a_n - 1,\ a_1 = 0$ 5) $a_n = -\sqrt{(n)}$ 6) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Ohraničenost

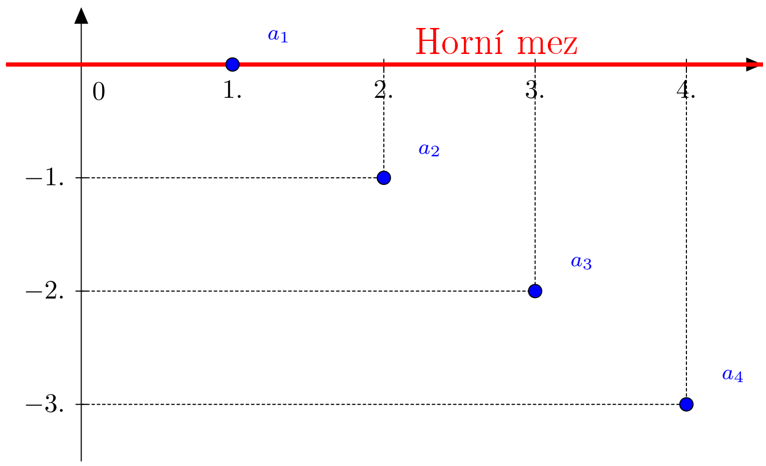
Ohraničenost nám u posloupností udává informaci o tom, zda má posloupnost nějakou mez, kterou nikdy nepřekročí (případně se její hodnoty pohybují pouze v určitém pásu).
Například posloupnost, která pro žádný člen nenabývá hodnoty menší než nula. Pak o takové posloupnosti řekneme, že je zdola ohraničená.

Rozlišujeme tyto případy ohraničenosti:

- shora ohraničená,
- zdola ohraničená,
- ohraničená (současně zdola i shora),

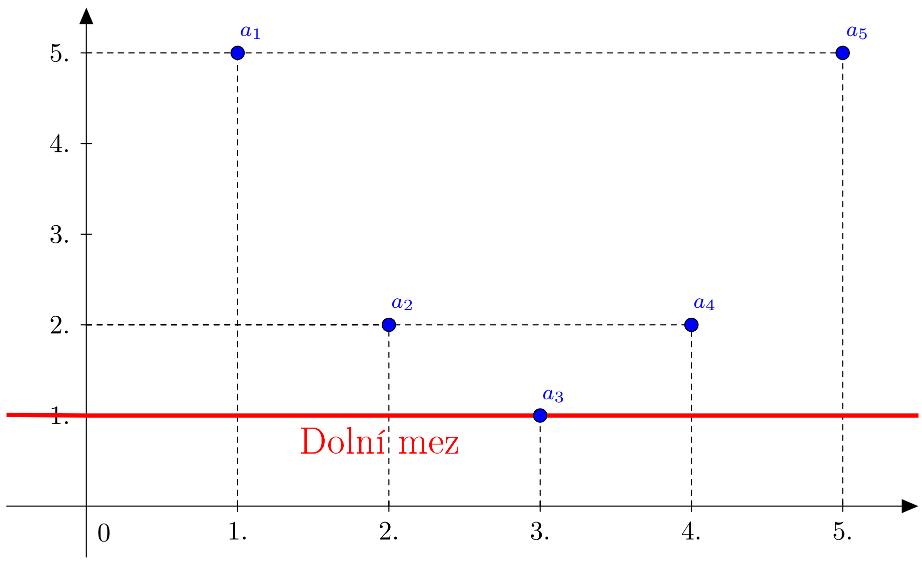
- neohraničená.

Shora ohraničená: je taková posloupnost, která nepřekročí určitou horní hranici. Hodnoty všech jejích členů jsou tedy menší, než nějaké číslo (nebo jsou tomuto číslu rovny). Platí, že existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq k$.
Například posloupnost $a_n = 1 - n$.



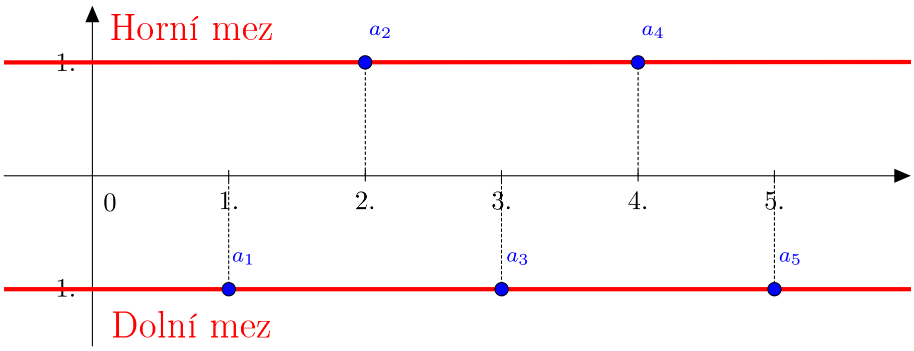
Shora ohraničená posloupnost $a_n = 1 - n$.

Zdola ohraničená: je taková posloupnost, která neklesne pod určitou dolní hranici. Hodnoty všech jejích členů jsou vyšší nebo rovny nějakému číslu. Platí, že existuje číslo $l \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq l$.
Například posloupnost $a_n = (n-3)^2 + 1$.



Zdola ohraničená posloupnost $a_n = (n-3)^2 + 1$.

Ohraničená: je posloupnost, pokud má současně omezení shora i zdola. Všechny hodnoty takové posloupnosti se nachází v pásu, který je vymezený oběma hranicemi. Platí, že existuje takové $m \in \mathbb{R}$, že $|a_n| \leq m$.
Například posloupnost $a_n = (-1)^n$.



Posloupnost ohraničená shora i zdola $a_n = (-1)^n$.

Cvičení 2: Určete ohraničenost následujících posloupností:

1) $a_n = (-1)^n \cdot n$ 2) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ 3) $a_n = (n-2)^2$
4) $a_n = -n^2$ 5) $a_n = \frac{1}{n}$ 6) $a_n = \frac{n+1}{n}$

Výsledky cvičení 1:

1) nerostoucí 2) není monotonní 3) rostoucí
4) klesající 5) klesající 6) rostoucí

Výsledky cvičení 2:

1) není ohraničená 2) ohraničená shora i zdola 3)ohraničená zdola
4) ohraničená shora 5) ohraničená shora 6) ohraničená shora i zdola