Aritmetická a geometrická posloupnost

V minulém letáku jsme se seznámili s tím, co to je posloupnost, způsoby, jakými ji lze zadat a některými vlastnostmi.
Tento leták se zaměří na aritmetickou posloupnost

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je druhem matematické posloupnosti, která se vyznačuje stálým rozdílem mezi libovolnými dvěma sousedními členy. Tento stálý rozdíl se nazývá **diference** a značí se písmenem d.
Pozor, číslo d může mít i zápornou hodnotu nebo může být rovno nule!

Rekurentní zadání

Označíme-li první člen posloupnosti $\{a_n\}$ jako a_1 potom k určení druhého člene a_2 stačí k prvnímu přičíst hodnotu diference d, tj.

$$a_2 = a_1 + d.$$

Pro určení člene a_3 přičteme ke druhému členu a_2 znovu hodnotu diference a získáme člen a_3

$$a_3 = a_2 + d \text{ atd.}$$

Je tedy jasně vidět to, co bylo řečeno výše. Libovolné dva sousední členy aritmetické posloupnosti mají stálý rozdíl.
Kdybychom chtěli znát $n + 1$-ní člen, pak bychom podle této skutečnosti mohli napsat, že

$$a_{n+1} = a_n + d$$

a tento vzorec nazýváme **rekurentní zadání aritmetické posloupnosti.**

Vzorec pro n-tý člen

Často u posloupností známe první člen a_1 a zajímáme se o členy, které jsou například až na sté pozici nebo i vyšší. V takových případech bychom postupným dosazováním strávili příliš mnoho času.
Zkusme najít způsob, jak naše počítání urychlit. Uvažujme následující příklad.

Tématický příklad: Máme rekurentně zadánu posloupnost $\{a_n\}$ jako $a_{n+1} = a_n + 3$, kde $a_1 = 0$. Zajímá nás hodnota dvacátého člene této posloupnosti a_{20}. Pro jeho určení můžeme postupně určovat všechny členy až do hledaného dvacátého nebo zde nalézt zákonitost, která naše počítání urychlí.
Sestavme tabulku několika prvních členů

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= a_1 + 3 &&= 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 &&= 6 \\ a_4 &= a_3 + 3 &&= 9 \\ a_5 &= a_4 + 3 &&= 12 \\ a_6 &= a_5 + 3 &&= 15 \\ &\vdots &&\vdots \end{aligned}$$

Při bližším prohlédnutí tabulky si lze všimnout, že mezi prvním a třetím členem je rozdíl 6, který odpovídá dvojnásobku diference. Mezi prvním a čtvrtým členem je rozdíl 9, což odpovídá trojnásobku diference. Mezi prvním a pátým je rozdíl čtyřnásobek diference atd.
Všimněme si, že mezi prvním a libovolným dalším členem je vždy rozdíl, který odpovídá součinu

diference · (pořadí hledaného prvku − pořadí prvního prvku).

Nový pojem: Vzorec pro n-tý člen

Přičteme-li k tomuto součinu navíc hodnotu prvního člene, získáváme hodnotu člene, který nás zajímá. Tuto skutečnost zapíšeme do vzorce, který se nazývá **vzorec pro n-tý člen**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Nyní je už snadné určit hodnotu a_{20} pouze dosadíme do vzorce hodnoty za n, a_1 a d

$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d a_{20} = 0 + 19 \cdot 3 a_{20} = 57.$$

Hodnota dvacátého člene posloupnosti je tedy 57.

Vzorec r-tého členu z s-tého

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu a_1 známe hodnotu jiného. Tento známý člen může našemu hledanému předcházet nebo i následovat. Pro tyto případy se používá vzorec, který je velmi podobný vzorci uvedenému výše.

Nový pojem: Vzorec r-tého členu z s-tého

Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec r-tého členu z s-tého** a zní

$$a_r = a_s + (r-s) \cdot d.$$

Zde je a_r hledaný člen a a_s člen, který známe.

Pokud bychom položili $r = n$ a $s = 1$, pak obdržíme

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

což je náš původní vzorec. Není tedy nutné si zapamatovat oba dva, stačí znát pouze druhý a vědět, co který symbol značí.

Součet prvních n členů

Kromě hledání hodnot členů posloupností se zajímáme i o jejich součty. Konkrétně jaké číslo obdržíme, pokud sečteme například prvních sto členů?
Se vzorcem určující výsledek je spjat příběh, který se traduje dodnes.

Myslete jako Gauss

Když bylo malému chlapci se jménem Friedrich Gauss devět let, navštěvoval obecnou školu stejně, jako mnoho dalších dětí. Jednoho dne se stalo, že chtěl mít jejich učitel celou hodinu klid a tak svým žákům zadal úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100.
Údajně malý Gauss během pár okamžiků vstal a odevzdal břidlicovou tabulku na učitelův stůl. Na tabulce se nenacházely žádné výpočty, bylo zde jen velkými číslicemi napsáno 5050. Což byl správný výsledek!
Znal snad malý Gauss výsledek zpaměti? Jak na to tak rychle přišel?
Na to malý Gauss svému učiteli s naprostou samozřejmostí vysvětluje, že výsledek součtu čísel od 1 do 100 se dá vypočítat zpaměti a to ihned!

Není nutné všechna čísla sčítat jedno po druhém. On si sečetl první číslo s posledním, poté druhé s předposledním atd. Výsledkem bylo vždy číslo 101. A protože se zde nachází přesně 50 takových dvojic (součtů), vynásobil číslo 101 padesáti. Tak získal správný výsledek 5050.

Dnes se už nedozvíme, kolik přesně je na tomto příběhu pravdy. Nicméně se v něm skývá brilantní myšlenka a vzorec, který se používá dodnes.

Zapišme matematicky myšlenku obsaženou v příběhu.
Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

101
101
101

$$1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad \dots \quad + \quad 98 \quad + \quad 99 \quad + \quad 100$$

Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Ustupme nyní od konkrétních hodnot a proveďme stejný rozbor.
Seřaďme za sebe prvních n členů posloupnosti $\{a_n\}$ a utvořme dvojice, jako jsme to provedli dříve, tj. první člen a_1 s posledním členem a_n, druhý člen a_2 s předposledním členem a_{n-1}, atd.

a_1+a_n
a_2+a_{n-1}
a_3+a_{n-2}

$$a_1 \quad + \quad a_2 \quad + \quad a_3 \quad + \cdots + \quad a_{n-2} \quad + \quad a_{n-1} \quad + \quad a_n$$

Takto nám vznikly na první pohled rozličné součty jako

$$a_1 + a_n;\ a_2 + a_{n-1},\ a_3 + a_{n-2}, \dots$$

Každý z těchto součtů lze ale převést na stejný tvar. První dvojici nechme ve tvaru, ve kterém se nachází. Naopak druhou dvojici můžeme přepsat následovně, máme

$$a_2 + a_{n-1}$$

zde ze znalosti prvního člene a diference víme, že $a_2 = a_1 + d$ a díky tomu nahradíme a_2 a dostaneme

$$a_1 + d + a_{n-1}$$

dále platí, že $a_n = a_{n-1} + d$, tudíž namísto $a_{n-1} + d$ napíšeme a_n a obdržíme

$$a_1 + a_n$$

což je stejné, jako první dvojice.
Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako $a_1 + a_n$ a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů. Protože je počet členů n, potom počet všech dvojic (součtů) je $\frac{n}{2}$. Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet s_n prvních n členů a odpovídající vzorec je tvaru

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$