Lineární nezávislost

Tento leták vám vysvětlí, co se skrývá pod pojmem lineární nezávislost. Představíme si také některé speciální typy matic.

Úvod

Každý systém lineárních rovnic můžeme přepsat jako vektorovou rovnici. Například systém

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 4x_1 + + 2x_3 &= 3 \\ 6x_2 - 3x_3 &= -12, \end{aligned} \tag{1}$$

můžeme zapsat jako vektorovou rovnici

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = b, \tag{2}$$

kde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}$ jsou sloupcové vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Říkáme, že rovnice (2) vyjadřuje $\mathbf{b}$ jako **lineární kombinaci** tří sloupcových vektorů koeficientů matice $\mathbf{A}$. Systém (1) má řešení $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ a $x_3 = 3$. Tedy $\mathbf{b} = (1/2)\mathbf{a}_1 + (-1/2)\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$. V tomto případě říkáme, že $\mathbf{b}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$.

Obecně řečeno, máme-li množinu vektorů v prostoru $\mathbb{R}^m$ říkáme, že skupina vektorů je lineárně závislá, když splňuje následující vlastnost: Alespoň jeden vektor může být vyjádřen jako lineární kombinace ostatních vektorů. V opačném případě, jestliže žádný vektor v skupině není lineární kombinací jiných vektorů, pak skupina vektorů je lineárně nezávislá.

Nový pojem

Konečná skupina vektorů $S = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru V se nazývá lineárně nezávislá jestliže rovnice

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{3}$$

má jediné řešení $c_1 = \ldots = c_n = 0$. V opačném případě se nazývá lineárně závislá.

Takže nulový vektor může být lineární kombinací nezávislých vektorů jen v triviálním případě. Chceme-li ukázat, že v uvedené definici lineární nezávislosti jsou rovnocenné, předpokládejme nejprve, že $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárně závislé podle definice (3). Pak rovnice $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ musí platit alespoň pro jeden koeficient c_i různý od 0. Pokud je to nezbytné, můžeme po přeuspořádání vektorů $\mathbf{a}_i$ a odpovídajícího násobku c_1 položit $c_1 \neq 0$. Řešení rovnice (3) pro $\mathbf{a}_1$ má potom tvar $\mathbf{a}_1 = -(c_2/c_1)\mathbf{a}_2 - \ldots - (c_n/c_1)\mathbf{a}_n$. Tedy $\mathbf{a}_1$ je lineární kombinací ostatních vektorů.

Naopak předpokládejme, že $\mathbf{a}_1$ může být zapsán jako lineární kombinace dalších vektorů, tj. $\mathbf{a}_1 = d_2\mathbf{a}_2 + d_3\mathbf{a}_3 + \ldots + d_n\mathbf{a}_n$. Pak $(-1)\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + d_3\mathbf{a}_3 + \ldots + d_n\mathbf{a}_n = 0$. První koeficient v rovnici je -1 a to je různé od 0, tak skupina vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ je lineárně závislá definováno v (3).

Tématický příklad. Dokažte, že:

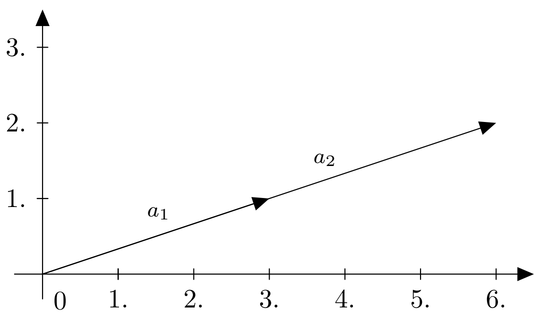
1. vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé. Doplňte obrázkem.
2. vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé. Doplňte obrázkem.

Řešení. 1. Platí, že $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, tj. $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = 0$, neboť $c_1 = 2$ a $c_2 = -1$, pak je zřejmé, že $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = 0$ a podmínka (3) je splněna. Tedy vektory jsou lineárně závislé. Dále vektor $\mathbf{a}_2$ má stejný směr jako vektor $\mathbf{a}_1$ a je dvakrát tak dlouhý. Ukázka na Obr.1

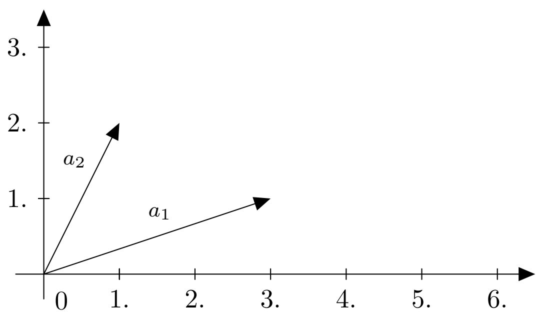
2. V tomto případě přepíšeme rovnici $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = 0$ do tvaru:

$$\begin{aligned} 3c_1 + \ \ c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Pro tyto dvě rovnice existuje jen jedno řešení a to $c_1 = c_2 = 0$, tedy vektory jsou lineárně nezávislé. Ukázka na Obr.2 +

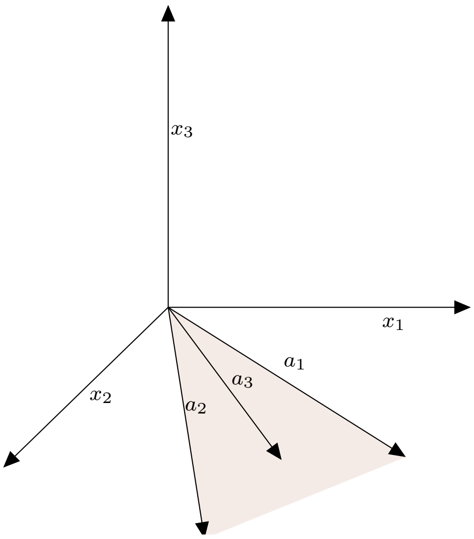


Obr. 1 Vektory jsou lineárně závislé

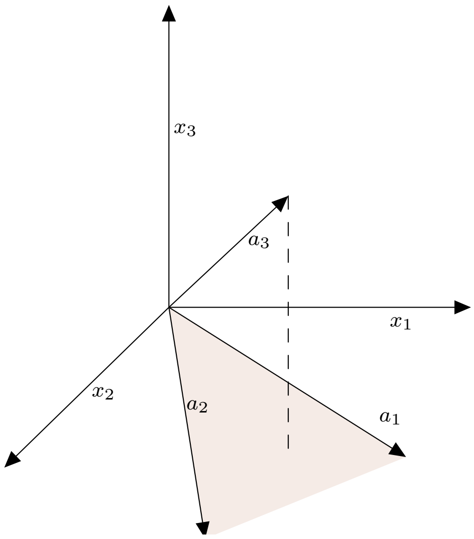


Obr. 2 Vektory jsou lineárně nezávislé

Je velmi užitečné pro určování závislosti resp. nezávislosti vektorů využívat geometrickou představu pro vektory z prostoru $\mathbb{R}^2$, jako v příkladu výše. V $\mathbb{R}^3$ uvažujme různoběžné trísložkové vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ začínající v počátku. Jestliže t_1 a t_2 jsou reálná čísla, pak vektor $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ a říkáme, že leží v rovině generované vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Každý vektor v rovině generované $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ je lineárně závislý na $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ další vektor $\mathbf{a}_3$, který nepatří do roviny generované $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Pak vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$ jsou lineárně nezávislé. Obecně, tři vektory v $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé, právě tehdy, když leží v jedné rovině. Tři vektory v $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé, právě tehdy, když žádná rovina neobsahuje všechny tři vektory. Obrázky **Obr. 3**. a **Obr. 4**. představují geometrickou interpretaci těchto výrazů.



Obr. 3. Vektory jsou lineárně závislé



Obr. 4. Vektory jsou lineárně nezávislé

Užitečná poznámka. V prostoru $\mathbb{R}^m$ **dva** vektory dimenze m jsou závislé právě tehdy, když jeden vektor je přímo úměrný druhému, tak že platí $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{a}_2$. Jestliže $c \neq 0$, vektory se nazývají **paralelní**.

Tématický příklad. Předpokládejme, že $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. Jsou vektory $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ lineárně nezávislé?

Řešení. Předpokládejme, že $c_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c_2(\mathbf{b} - \mathbf{c}) + c_3(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0$. Úpravou rovnice dostaneme $(c_1 + c_3)\mathbf{a} + (-c_1 + c_2)\mathbf{b} + (-c_1 - c_3)\mathbf{c} = 0$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé, pak platí, že $c_1 + c_3 = 0, -c_1 + c_2 = 0$ a $-c_2 - c_3 = 0$. Tedy tyto rovnice jsou splněny (na příklad), když $c_1 = c_2 = 1$, a $c_3 = -1$, tedy $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé.

Lineární závislost a systém lineárních rovnic

Uvažujme obecný systém m rovnic o n neznámých zapsaný v klasické formě a také ve tvaru vektorové rovnice:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad x_1\mathbf{a}_1 + \ldots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{4}$$

kde $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ jsou sloupcové vektory koeficientů a $\mathbf{b}$ je sloupcový vektor koeficientů $b_1, \ldots, b_m$.

Předpokládejme, že systém (4) má dvě řešení $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v}' = (v_1, \dots, v_n)$. Pak $u_1\mathbf{a}_1 + \dots + u_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ a $v_1\mathbf{a}_1 + \dots + v_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Protože vpravo máme v obou rovnicích $\mathbf{b}$ můžeme porovnat levé strany a upravit do tvaru:

$$(u_1 - v_1)\mathbf{a}_1 + \dots + (u_n - v_n)\mathbf{a}_n = 0 \tag{5}$$

Nechť $c_1 = u_1 - v_1, \dots, c_n = u_n - v_n$. Dvě řešení jsou rozdílná jen tehdy, když všechna $c_1, \dots, c_n$ jsou různá od 0. Shrňme, že když systém (5) má více než jedno řešení, pak sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárně závislé. Ekvivalentně: Když sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárně nezávislé, pak má systém (5) nejvýše jedno řešení. Bez informace o tom jak vypadá pravá strana systému $\mathbf{b}$ nemůžeme obecně říct, jestli systém má vůbec nějaké řešení.

Zvažme dále případ, kdy $m = n$

Důležité tvrzení

Máme-li n sloupcových vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ uspořádané v matici $n \times n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

tyto vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Podívejme se blíže na naše tvrzení. Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektorová rovnice $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots x_n\mathbf{a}_n = 0$ má pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Tato vektorová rovnice je ekvivalentní k homogennímu systému rovnic a triviální řešení má jen tehdy, když $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Cvičení

1. Vyjádřete vektor $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Určete, které z následujících dvojic vektorů jsou lineárně nezávislé

   a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Dokažte, že $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé.