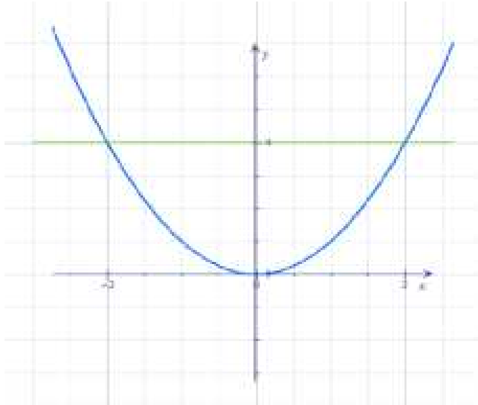
Řešení příkladů na procvičování integrálu[1]

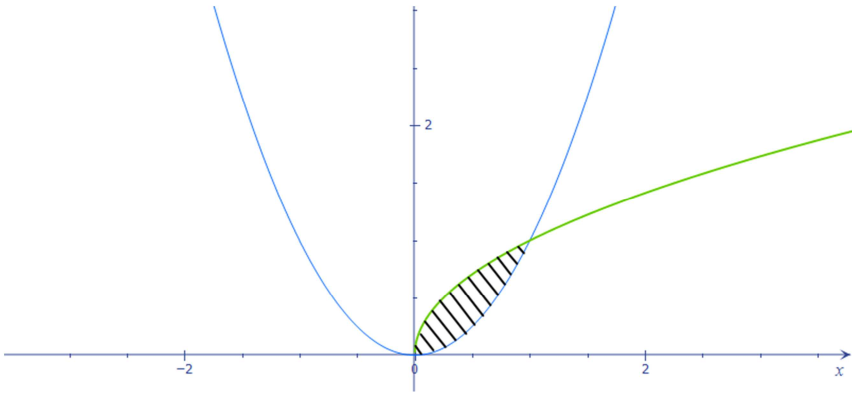
1. Nejprve musíme najít, kde jsou hranice M, pomůžeme si namalováním obrázků, kde zakreslíme obě nám známé rovnice. Budeme počítat oblast, která je ohraničena jak modrou, tak zelenou čárou. Nalezli jsme tak oblast M, která je zleva x = -2 a zprava x = 2. Ohraničení na svislé ose již máme ze zadání. Můžeme tedy integrovat.



$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(6x^2+2y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left[6x^2y+y^2\right]_{x^2}^{4}dx = \int_{-2}^{2}(24x^2+16)-(6x^4+x^4)\,dx$$
$$= \left[8x^3+16x-\frac{7}{5}x^5\right]_{-2}^{2} = 102{,}4$$

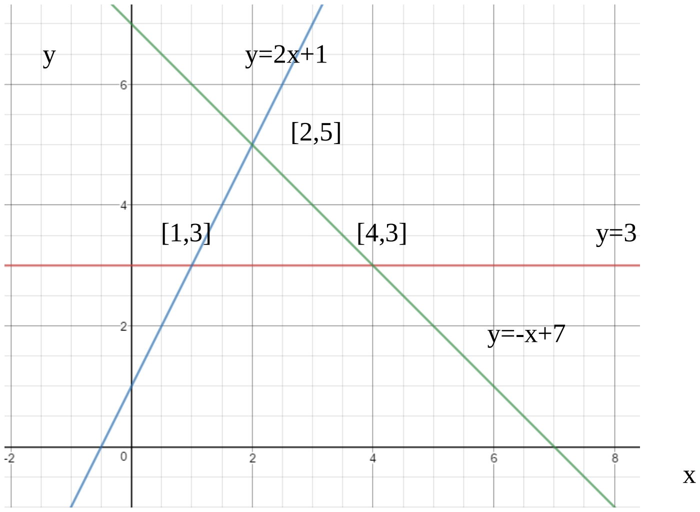
2. $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\right]dx = \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\left[\left(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)\right]dx =$

$\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx = \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10} = \mathbf{\frac{3}{10}}$



[1] Příklady vytvořili studenti předmětu BPM_STA1

3.



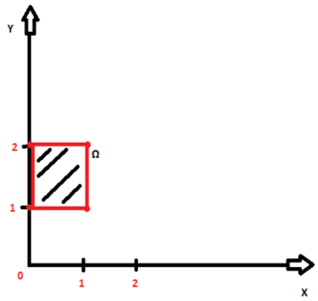
Priesečníky:

1.) y=3	2.) y=3	3.) y=2x+1
y=2x+1	y=-x+7	y=-x+7
------------	----------	---------------
3=2x+1	3=-x+7	2x+1=-x+7
2=2x	x=4	3x=6
x=1	[4,3]	x=2
[1,3]		y=-2+7=5 [2,5]

$\int_3^5 \left[\int_{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}^{7-y} 2\,x^2 dx\right] dy = \int_3^5 \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}^{7-y} dy = \frac{2}{3}\int_3^5 \left[(7-y)^3 - \left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)^3\right] dy == \frac{2}{3}\int_3^5 \left[(343-147y+21y^2-y^3) - \left(\frac{y^3}{8}-\frac{3y^2}{8}+\frac{3y}{8}-\frac{1}{8}\right)\right] dy = \frac{2}{3}\int_3^5 \left(\frac{2745}{8}-\frac{1179y}{8}+\frac{171y^2}{8}-\frac{9y^3}{8}\right) dy = \frac{1}{12}\left[2745y - \frac{1179y^2}{2}+\frac{171y^3}{3}-\frac{9y^4}{4}\right]_3^5 = \frac{1}{12}[13725-14737{,}5+7125-1406{,}25-8235+5305{,}5-1539+182{,}25] = \frac{420}{12} = 35$

4. Abychom si lépe představili, jaké budou krajní body, je nejlepší si útvar namalovat. U dvojného integrálu počítám objem. Dolní podstava je oblast OMEGA .
   Určím si meze: po ose X se pohybuji z bodu 0 do bodu 1, po ose Y se pohybuji od bodu 1 do budu 2.

$$\int_1^2 \left[\int_0^1 x^2y^2dx\right] dy = \int_1^2 y^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy = \frac{1}{3}\int_3^5 y^2 dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{9}(8-1) = \frac{7}{9}$$



5. Musíme najít, kde se křivka s přímkou protne:

$2x = x^2$

$2x - x^2 = 0$

$x(2-x) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2$

Dosadíme x_1 a x_2 do integrálu a spočítáme jej:

$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} xy\ dy\right] dx$

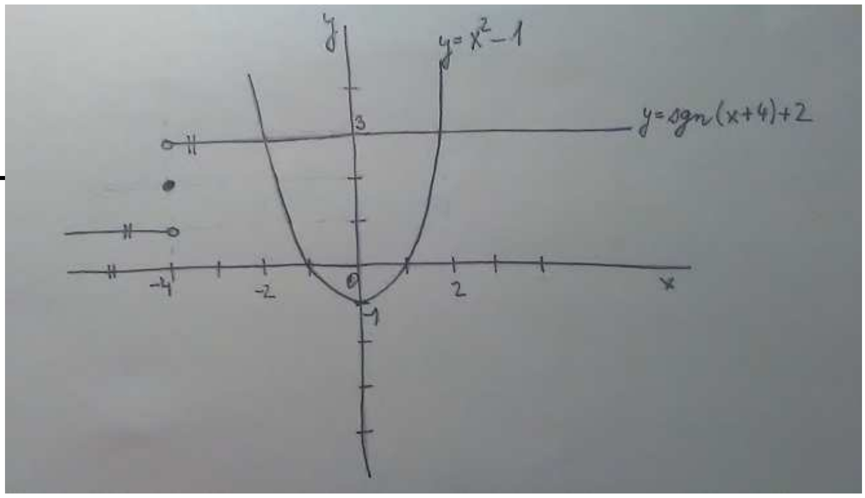
$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} xy\ dy\right] dx = \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x} = \int_0^2 \left[x\frac{(2x)^2}{2}\right] - \left[x\frac{(x^2)^2}{2}\right] = \int_0^2 \left[x\frac{4x^2}{2}\right] - \left[x\frac{x^4}{2}\right] = \int_0^2 2x^3 - \frac{1}{2}x^5 =$

$\left[2\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \left(2\frac{2^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{2^6}{6}\right) - (0) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24-16}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}$

6.

$y = sgn\,(x+4) + 2$

$y = x^2 - 1$



$$\int_{-2}^{2}\left[\int_{x^2-1}^{3} \frac{y}{3}dy\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\frac{y^2}{6}\right]_{x^2-1}^{3} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{3^2}{6} - \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{6}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{-x^4}{6} + \frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}\right)dx = \left[-\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{9} + \frac{4x}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{2^5}{30} + \frac{(-2)^5}{30} + \frac{2^3}{9} - \frac{(-2)^3}{9} + \frac{4*2}{3} - \frac{4*(-2)}{3} = \frac{-192+640}{90} = \frac{224}{45}$$

7. $\int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{x} x^2y + 2y\ dydx + \int_2^3 \int_{(x-2)^2}^{-x+4} x^2y + 2y\ dydx =$

Rozdělíme integrál na dvě části a každou spočítáme zvlášť, na závěr obě části sečteme.

$\int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{x} x^2y + 2y\ dydx = \int_1^2 (x^2 \times \frac{y^2}{2} + 2 \times \frac{y^2}{2})dx = \int_1^2 \left[x^2 \times \frac{y^2}{2} + y^2\right]^x =$

$\int_1^2 x^2 \times \frac{x^2}{2} + x^2 - \left[\frac{x^2\times(x-2)^4}{2} + (x-2)^4\right] = \int_1^2 \frac{x^4}{2} + x^2 - \left[\frac{x^6-8x^5+24x^4-32x^3+16x^2}{2} + \right.$

$\left. x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16\right] =$

$\int_1^2 \left[\frac{x^4}{2} + x^2 - (\frac{x^6}{2} - 4x^5 + 13x^4 - 24x^3 + 32x^2 - 32x + 16)\right] = \int_1^2 \left[-\frac{25}{2}x^4 - 31x^2 - \frac{x^6}{2} + 4x^5 + 24x^3 + 32x - 16\right] = \left[-\frac{5}{2}x^5 - \frac{31}{3}x^3 - \frac{x^7}{14} + \frac{2}{3}x^6 + 6x^4 + 16x^2 - 16x\right] = -\frac{8}{7} - \left(-\frac{131}{21}\right) = \frac{107}{21}$

$\int_2^3 \int_{(x-2)^2}^{-x+4} x^2y + 2y\,dydx = \int_2^3 \left[x^2 \times \frac{y^2}{2} + y^2\right] dx =$

$\int_2^3 \left[\, x^2 \times \frac{(4-x)^2}{2} + (4-x)^2 - \left(\frac{x^2 \times (x-2)^4}{2} + (x-2)^4\right)\right] dx = \int_2^3 \left[\frac{16x^2 - 8x^3 + x^4}{2} + 16 - 8x + x^2 - \left(\frac{x^6}{2} - 4x^5 + 13x^4 - 24x^3 + 32x^2 - 32x + 16\right)\right] = \int_2^3 (9x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{2} + 16 - 8x - \frac{x^6}{2} + 4x^5 - 13x^4 + 24x^3 - 32x^2 + 32x - 16) = \left[-23 \times \frac{x^3}{3} + 20 \times \frac{x^4}{4} - \frac{25}{2} \times \frac{x^5}{5} + 24 \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{14} + 4 \times \frac{x^6}{6}\right](3,2) = \frac{198}{7} - \left(\frac{424}{21}\right) = \frac{170}{21}$

$$\int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{x} x^2y + 2y\,dydx + \int_2^3 \int_{(x-2)^2}^{-x+4} x^2y + 2y\,dydx = \frac{107}{21} + \frac{170}{21} = \frac{277}{21}$$