I Determinant matice řádu 3×3

Viděli jsme, že determinanty jsou důležité při řešení soustav rovnic a při hledání inverzních matic. Pravidlo pro výpočet determinantu matice řádu 2×2 je poněkud přímočaré. Výpočet determinantu matice řádu 3×3 je složitější a záleží na dalších veličinách známých jako minory a kofaktory.

V tomto letáku budeme pracovat s maticí řádu 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Minory

Každý prvek ve čtvercové matici má svůj vlastní **minor.** Minor je hodnota determinantu matice, která vznikne škrtnutím řádku a sloupce uvažovaného prvku.

Pro prvek 7 v matici A, škrtáme první řádek a první sloupec této matice. Dostáváme tak matici řádu 2×2 s hodnotami $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Nyní spočítáme determinant této matice:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-2)) - (-1 \cdot 4) = -6 - (-4) = -2$$

Minor prvku 7 je tedy -2.

Pro prvek 4 škrtáme třetí řádek a druhý sloupec. Takto vzniklá matice řádu 2×2 je $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nyní dopočítáme determinant této matice:

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (7 \cdot (-1)) - (1 \cdot 0) = -7 - (0) = -7$$

Minor prvku 4 je tedy -7.

Takto bychom mohli pokračovat a nalézt minory ke všem prvkům matice A.

Umístění znamének

Každý prvek ve čtvercové matici má své místem určené **znaménko.** Znaménko prvku v levém horním rohu je vždy " + ". Umístění znamének se na dalších pozicích střídá z " + " na " − " zleva doprava a shora dolů. Pro matici řádu 3×3 je umístění znamének následující:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Kofaktory

Každý prvek ve čtvercové matici má svůj **kofaktor.** Kofaktor je součin minoru a znaménka, které přísluší určitému prvku.

Prvek 7 v matici A má znaménko " + " a minor -2, takže kofaktor je $+(-2) = -2$.
Prvek 4 v matici A má znaménko " − " a minor -7, takže kofaktor je $-(-7) = 7$.
Tímto způsobem můžeme nalézt všechny kofaktory.
Původní matice, její matice složená z minorů a matice kofaktorů jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -8 & -11 & 34 \\ -5 & -7 & 21 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 8 & -11 & -34 \\ -5 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

Determinant matice řádu 3×3

Pro výpočet determinantu matice řádu 3×3 vybereme libovolný řádek nebo sloupec matice - ten bude obsahovat tři prvky. Potom nalezneme tři součiny násobením každého prvku v řádku nebo sloupci (podle toho, kterou možnost jsme zvolili) svými kofaktory. Nakonec sečteme všechny tyto součiny a výsledná hodnota je hledaný determinant. Poznamenejme, že nezáleží na tom, který řádek nebo sloupec jsme zvolili, hodnota determinantu bude ve všech případech stejná.

Předpokládejme, že jsme v naší matici A zvolili první řádek, podle kterého budeme rozvíjet determinant. Tři určené prvky jsou $7, 2$ a 1. Odpovídající kofaktory jsou $-2, 3$ a 9. Potom tři součiny jsou $7 \cdot (-2) = -14$, $2 \cdot 3 = 6$, $1 \cdot 9 = 9$. Sečteme všechny tyto součiny a obdržíme $-14 + 6 + 9 = 1$, tedy determinant matice A je roven číslu 1.

Mohli bychom namítat, že pokud bychom zvolili jiný řádek nebo sloupec, dostali bychom jiný výsledek. Zkusme to tedy. Předpokládejme, že jsme namísto prvního řádku zvolili druhý sloupec. Jedná se o čísla $2, 3, 4$ a k nim náležící kofaktory $3, -11, 7$. Výsledné tři součiny jsou $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot (-11) = -33$ a $4 \cdot 7 = 28$. Sečtením obdržíme výsledek $6 - 33 + 28 = 1$.

Zvolíme-li jakýkoliv řádek nebo sloupec, determinant příslušící matici A bude vždy 1.

Šikovná rada

Pokud počítáme determinant matice, není nutné určit všech devět kofaktorů. Je potřeba nalézt kofaktory třech prvků ve zvoleném řádku či sloupci. Je-li některý z prvků v řádku nebo sloupci roven nule, není nutné hledat jeho kofaktor. Kofaktor násobíme prvkem matice, a protože je prvek matice roven nule, je i součin kofaktoru a tohoto prvku roven číslu nula.

V dalším z letáků této série si ukážeme příklad nalezení determinantu nejúčinnějším způsobem.