Skalární součin

Jedním ze způsobů, jak můžeme dva vektory kombinovat, je **skalární součin**. Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů, jak již název napovídá, je skalár. V tomto letáku se naučíte, jak vypočítat skalární součin a setkáte se s některými geometrickými aplikacemi.

Po přečtení tohoto textu byste měli být schopni:

- definovat skalární součin dvou vektorů
- uvést některé důležité vlastnosti skalárního součinu
- vypočítat skalární součin dvou vektorů daných v kartézském tvaru
- použít skalární součin v některých geometrických aplikacích

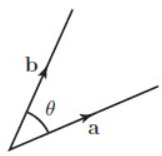
Obsah

Úvod

Jedním ze způsobů, jak můžeme dva vektory kombinovat, je **skalární součin**. Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů, jak již název napovídá, je skalár.

Definice skalárního součinu

Podíváme se na dva vektory a a b nakreslené na Obrázku 1. Všimněte si, že tyto dva vektory začínají ve stejném bodě. Úhel mezi nimi je označen θ.



Obrázek 1. Vektory a a b, mezi kterými je úhel θ.

Skalární součin a a b definujeme následovně:

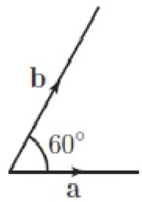
Nový pojem: Skalární součin

Skalární součin vektorů a a b je definován jako

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta,$$

kde $|a|$ je modul (velikost) vektoru a, $|b|$ je modul (velikost) vektoru b a θ je úhel mezi vektory a a b.

Tématický příklad. Uvažujme dva vektory a a b (Obrázek 2). Předpokládejme, že vektor a má velikost 4, vektor b má velikost 5 a úhel mezi nimi je 60°.



Obrázek 2. Dva vektory a a b, mezi kterými je úhel 60°.

Podle výše uvedené definice nalezneme skalární součin vektorů a a b

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a||b| \cos\theta \\ &= 4 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Skalární součin těchto vektorů je číslo 10. Všimněte si, že odpovědí je skalár, tedy číslo a ne vektor. Naučili jsme se tedy způsob, jakým lze kombinovat dva vektory, abychom získali skalár.

Některé vlastnosti skalárního součinu

Komutativita a distributivita

Předpokládejme, že pro dva vektory v předchozím příkladu spočítáme součin v opačném pořadí. To znamená, že chceme najít $b \cdot a$. Definice skalárního součinu vektorů $b \cdot a$ je

Důležité tvrzení

Skalární součin vektorů b a a je definován jako

$$b \cdot a = |b||a| \cos\theta.$$

Použijeme čísla z příkladu 1 a vypočteme

$$\begin{aligned} b \cdot a &= |b||a| \cos\theta \\ &= 5 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 5 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je stejný a nezáleží na pořadí. Obecně platí:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Tato vlastnost skalárního součinu se nazývá **komutativita**. Poukazujeme na to proto, že v dalším letáku se dozvíte o jiném způsobu kombinování vektorů známém jako **vektorový součin**. Vektorový součin není komutativní, a proto záleží na pořadí, ve kterém zapíšeme oba vektory.

Důležité tvrzení: Komutativita

Skalární součin je **komutativní**, když

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Další vlastností skalárního součinu je **distributivita**. To znamená, že

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Nebudeme tento výsledek dokazovat, ale využijeme jej později při odvození vzorce pro nalezení skalárního součinu.

Důležité tvrzení: Distributivita

Skalární součin je **distributivní**, když

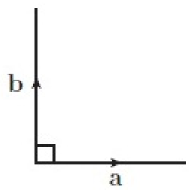
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

nebo také ekvivalentně

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Skalární součin dvou na sebe kolmých vektorů

Motivační příklad. Uvažujme dva vektory a a b (Obrázek 3). Úhel mezi nimi je 90°.



Obrázek 3. Dva na sebe kolmé vektory a a b.

Vypočteme skalární součin vektorů a a b

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a||b| \cos\theta \\ &= |a||b| \cos 90^\circ \\ &= 0, \end{aligned}$$

protože $\cos 90^\circ = 0$. Skalární součin dvou vektorů, které svírají pravý úhel, je vždy 0. Říkáme, že tyto vektory jsou na sebe **kolmé**.

Důležité tvrzení

Pro dva na sebe kolmé vektory platí

$$a \cdot b = 0$$

Užitečná poznámka. Máme-li dva nenulové vektory a a b, jejichž skalární součin je nula, pak tyto vektory musí být kolmé.

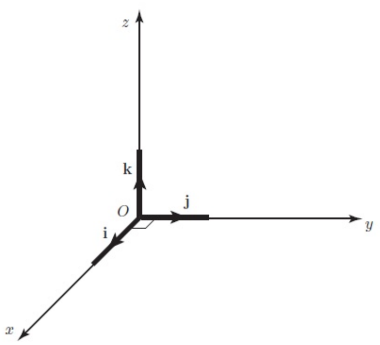
Skalární součin dvou vektorů daných v kartézském tvaru

Uvažujme nyní, že chceme najít skalární součin dvou vektorů, které jsou zadané v kartézském tvaru. Např.

$$a = 3i - 2j + 7k, \quad b = -5i + 4j - 3k,$$

kde i, j a k jsou jednotkové vektory ve směrech os x, y a z.

Motivační příklad. Předpokládejme, že chceme najít skalární součin vektorů $i \cdot j$ (Obrázek 4). Všimněte si, že vektory i a j leží podél os x a y, proto musí být kolmé, tzn. skalární součin $i \cdot j$ musí být nulový. Stejný výsledek dostaneme i pro skalární součin vektorů $i \cdot k$ a $j \cdot k$.



Obrázek 4. Dva na sebe kolmé vektory a a b.

Motivační příklad. Předpokládejme, že chceme najít $i \cdot i$ (Obrázek 4). Vektor i je jednotkový vektor, takže jeho délka je 1. Úhel, který svírá vektor sám se sebou, musí být nula. Pak

$$\begin{aligned} i \cdot i &= |i||i| \cos 0^\circ \\ &= 1 \times 1 \times 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

jelikož $\cos 0^\circ = 1$. Potom $j \cdot j = 1$ a $k \cdot k = 1$.

Důležité tvrzení

Pokud i, j a k jsou jednotkové vektory ve směrech os x, y a z, pak

$$i \cdot j = 0, \quad i \cdot k = 0, \quad j \cdot k = 0,$$

$$i \cdot i = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1.$$

Tyto výsledky můžeme použít k odvození vzorce pro nalezení skalárního součinu dvou vektorů uvedených v kartézském tvaru:

Předpokládejme, že $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ a $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, pak

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 i \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) + a_2 j \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) + a_3 k \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 i \cdot b_1 i + a_1 i \cdot b_2 j + a_1 i \cdot b_3 k + a_2 j \cdot b_1 i + a_2 j \cdot b_2 j + a_2 j \cdot b_3 k + a_3 k \cdot b_1 i + a_3 k \cdot b_2 j \\ &+ a_3 k \cdot b_3 k = a_1 b_1 i \cdot i + a_1 b_2 i \cdot j + a_1 b_3 i \cdot k + a_2 b_1 j \cdot i + a_2 b_2 j \cdot j + a_2 b_3 j \cdot k + a_3 b_1 k \cdot i \\ &+ a_3 b_2 k \cdot j + a_3 b_3 k \cdot k. \end{aligned}$$

Z předchozího tvrzení plyne, že většina těchto součinů je rovna nule a pro zbylé platí $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$. Dostaneme

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Tento vzorec můžeme použít pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů zadaných v kartézském tvaru.

Důležité tvrzení

Pokud máme zadané vektory a a b ve tvaru $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, pak je jejich skalární součin

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Všimněte si, že výsledek získáme, pokud vynásobíme části i, j a k a nakonec výsledky sečteme. Někdy se tento vzorec nazývá **vnitřní součin** vektorů a a b.

Tématický příklad. Vypočtěte skalární součin dvou vektorů a a b, kde $a = 4i + 3j + 7k$, $b = 2i + 5j + 4k$. Řešení:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (4)(2) + (3)(5) + (8)(4) \\ &= 8 + 15 + 28 \\ &= 51. \end{aligned}$$

Tématický příklad. Vypočtěte skalární součin dvou vektorů a a b, kde $a = -6i + 3j - 11k$, $b = 12i + 4k$. Všimněte si, že část j vektoru b je nula. Řešení:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-6)(12) + (3)(0) + (-11)(4) \\ &= -72 + 0 - 44 \\ &= -116. \end{aligned}$$

Často bývá užitečné využít sloupcového zápisu vektorů. Uvažujme opět poslední příklad. Vektory a a b zapíšeme ve sloupcovém tvaru

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a skalární součin

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = (-6)(12) + (3)(0) + (-11)(4) = -116.$$

Cvičení 1

1. Pro $a = 4i + 9j$ a $b = 3i + 2j$ najděte (a) $a \cdot b$, (b) $b \cdot a$, (c) $a \cdot a$, (d) $b \cdot b$.
2. Najděte skalární součin vektorů $5i$ a $8j$.
3. Pro $p = 4i + 3j + 2k$ a $q = 2i - j + 11k$ najděte (a) $p \cdot q$, (b) $q \cdot p$, (c) $p \cdot p$, (d) $q \cdot q$.
4. Pro $r = 3i + 2j + 8k$ dokažte, že $r \cdot r = r^2$.
5. Pro $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$ najděte (a) $a \cdot b$, (b) $b \cdot a$, (c) $a \cdot a$, (d) $b \cdot b$.
6. Body A, B a C mají souřadnice $(3, 2, 1)$, $(5, 4, 2)$ a $(-4, 2, 1)$ v tomto pořadí. Najděte skalární součin vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$.

Aplikace skalárního součinu

V této části se podíváme na některé aplikace, kde lze využít skalární součin.

Použití skalárního součinu k ověření, zda jsou dva vektory kolmé

Běžnou aplikací skalárního součinu je ověření, zda jsou dva vektory kolmé. Uvažujme definici

$$a \cdot b = |a||b| \cos\theta.$$

Pokud vektory a a b jsou nenulové a jejich skalární součin $a \cdot b$ je roven nule, pak lze odvodit, že $\cos\theta$ se musí rovnat nule, takže $\theta = 90°$, tj. a a b jsou kolmé.

Tématický příklad. Předpokládejme, že chceme zjistit, zda jsou, nebo nejsou vektory a a b kolmé, kde

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že ani a, ani b nejsou nulové vektory. Vypočteme skalární součin

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (3)(1) + (2)(-2) + (-1)(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$$

a vidíme, že vektory a a b jsou na sebe skutečně kolmé.

Užitečná poznámka. Pokud a a b nejsou nulové vektory a zároveň pro ně platí $a \cdot b = 0$, pak vektory a a b jsou na sebe kolmé.

Použití skalárního součinu pro nalezení úhlu mezi dvěma vektory

Jednou z běžných aplikací skalárního součinu je hledání úhlu mezi dvěma vektory. Z definice skalárního součinu

$$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$$

můžeme získat výraz pro $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|}. \tag{1}$$

Pokud jsou dány vektory a a b v kartézském tvaru, je možné vypočítat skalární součin $a\cdot b$. Velikost každého vektoru můžeme spočítat jako

$$|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \qquad |b| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

Rovnice (1) může být použita k nalezení úhlu mezi dvěma vektory.

Důležité tvrzení

Pro úhel θ mezi dvěma vektory a a b platí

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|}.$$

Tématický příklad. Najděte úhel mezi vektory $a = 4i+3j+7k$ a $b = 2i+5j+4k$. Řešení: Skalární součin $a\cdot b$ se rovná 51 (výpočet v příkladu 5). Velikost každého vektoru je

$$|a| = \sqrt{4^2+3^2+7^2} = \sqrt{74},$$
$$|b| = \sqrt{2^2+5^2+4^2} = \sqrt{45}.$$

Pak z rovnice (1) plyne

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a\cdot b}{|a||b|}\\ &= \frac{51}{\sqrt{74}\sqrt{45}}\\ &= 0.8838.\end{aligned}$$

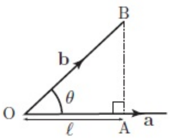
Pomocí kalkulačky určíme úhel

$$\theta = \cos^{-1} 0.8838 = 27,90^\circ.$$

Úhel mezi vektory a a b je $27,90^\circ$.

Nalezení části vektoru ve směru dalšího vektoru

Další aplikací skalárního součinu je nalezení části jednoho vektoru ve směru druhého. Můžeme si představit, že vektor b je tvořen složkou ve směru vektoru a, $\overrightarrow{(OA)}$, spolu s kolmou složkou, $\overrightarrow{(AB)}$. Složka ve směru a se nazývá **projekce** b na a (Obrázek 5).



Obrázek 5. Projekce b na a je l.

Z pravoúhlého trojúhelníku OAB a užitím trigonometrie vidíme, že

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{l}{|b|}, \\ l &= |b|\cos\theta. \end{aligned}$$

Pomocí vzorečku pro $\cos\theta$ získaného v předchozí části dostáváme

$$\begin{aligned} l &= |b|\cos\theta \\ &= |b|\frac{a\cdot b}{|a||b|} \\ &= \frac{a\cdot b}{|a|}. \end{aligned}$$

Analogický tvar

$$l = b\cdot\frac{a}{|a|}.$$

Důležité tvrzení

Projekci l vektoru b na a lze nalézt pomocí skalárního součinu b a jednotkového vektoru ve směru a

$$l = b\cdot\hat{a}.$$

Tématický příklad. Najděte část $b = 3i + j + 4k$ ve směru $a = i - j + k$. Řešení: Jednotkový vektor ve směru a je

$$\hat{a} = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i - j + k).$$

Pak

$$b\cdot\hat{a} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(3-1+4) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Část $b = 3i + j + 4k$ ve směru $a = i - j + k$ je $2\sqrt{3}$.

Cvičení 2

1. Body$A$, B a C mají souřadnice $(3,2,1)$, $(5,4,2)$ a $(-4,2,1)$ v tomto pořadí. Skalární součin $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ byl nalezen v předchozím cvičení č. 6. Najděte úhel mezi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$.
2. Určete, zda vektory $2i + 4j$ a $-i + \frac{1}{2}j$ jsou nebo nejsou kolmé.
3. Stanovte $p\cdot i$ pro $p = 4i + 8j$. Najděte úhel, který je mezi p a osou x.
4. Najděte část vektoru $r = i - j + 3k$ ve směru $a = 7i - 2j + 2k$.

Odpovědi na cvičení

Cvičení 1

1. (a) 30, (b) 30, (c) 97, (d) 13.
2. 0.
3. (a) 27, (b) 27, (c) 29, (d) 126.
4. 77.
5. (a) -50, (b) -50, (c) 29, (d) 201.
6. -14.

Cvičení 2
1. 131.8°.
2. Jedná se o nenulové vektory. Jejich skalární součin je nulový, tzn. musí být na sebe kolmé.
3. $p \cdot i = 4$. Požadovaný úhel je 63.4°.
4. $\frac{15}{\sqrt{57}} = 1.987$.