Inverzní matice k matici 2×2

Jakmile víme, jak násobit matice, je přirozenou otázkou, jestli je můžeme dělit. Odpověď zní ne. Nicméně, definováním jiné matice nazývané inverzní matice, je možné pracovat s operací, která hraje podobnou roli jako má dělení. V tomto letáku si vysvětlíme, co se rozumí inverzní maticí a jak se tato matice vypočítá.

Předběžný příklad

Předpokládejme, že počítáme součin dvou matic $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud přeuspořádáme a přepočítáme součin, obdržíme stejný výsledek. Ověřte, že:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že výsledkem násobení těchto dvou matic je **jednotková** matice. Dvojice čtvercových matic, které mají tuto vlastnost, nazýváme **vzájemné** matice. První matice je inverze té druhé a naopak.

Inverzní matice k matici 2×2

Inverzní matice k matici A řádu 2×2 je jiná matice řádu 2×2 značená A^{-1} s vlastností

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je identická matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ řádu 2×2. To znamená, že násobením matice její inverzní maticí obdržíme jednotkovou matici. Poznamenejme, že v tomto kontextu A^{-1} neznamená $\frac{1}{A}$.

Ne všechny matice řádu 2×2 mají inverzní matici. Pokud je determinant matice nulový, pak tato matice nemá matici inverzní a nazýváme ji maticí **singulární.** Pouze nesingulární (známé spíše pod termínem **regulární**) matice mají inverzní matici.

Jednoduchý vzorec pro inverzní matici

V případě matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ řádu 2×2 existuje jednoduchý vzorec pro nalezení inverzní matice:

$$\text{if} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{then} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že hodnota $ad - bc$ je determinant matice A. Navíc $\frac{1}{ad-bc}$ není definováno pro $ad - bc = 0$, protože nelze dělit nulou. Z tohoto důvodu neexistuje inverzní matice k matici A, pokud je její determinant roven nule.

Příklad. Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Použitím výše uvedeného vzorce získáme

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(3)(2) - (1)(4)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

což lze také zapsat jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Měli bychom ověřit, zda je tato odpověď pravdivá provedením výpočtu $A \cdot A^{-1}$. Výsledkem by měla být jednotková matice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad. Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení. Použitím výše uvedeného vzorce získáme

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(2)(1) - (4)(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Což lze také zapsat jako

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & -4/14 \\ 3/14 & 2/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & -2/7 \\ 3/14 & 1/7 \end{pmatrix}$$

přestože je přípustné nechat zlomek $\frac{1}{14}$ před maticí.

Příklad. Pokud je to možné, najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení. V tomto případě je determinant matice roven nule:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

Protože je determinant nulový, je matice A singulární a neexistuje k ní inverzní matice.

Jak nalézt inverzní matice k maticím řádu 3×3 si vysvětlíme v dalších letácích.