Vektory

Vektor je veličina, která má jak velikost tak i směr. Obě tyto vlastnosti musí být uvedeny, aby byl vektor stanoven úplně. V této části je návod, jak vektory zapsat, jak je sčítat a odčítat a jak je používat v geometrii. Na to, aby jste práci s vektory zvládli, je také důležité vypočítat hodně příkladů, pak se Vám počítaní s nimi bude zdát jednoduché.

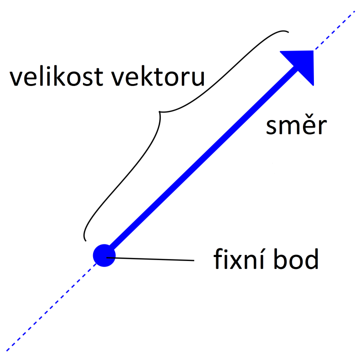
Po přečtení tohoto textu byste měli být schopni:

- rozlišovat mezi vektorem a skalárem
- chápat jak sčítat a odčítat vektory
- vědět, kdy je nějaký vektor násobkem druhého
- používat vektory při řešení jednoduchých problémů v geometrii

Vektorové veličiny

Vektorové veličiny jsou velmi užitečné ve fyzice. Důležitou charakteristikou vektorové veličiny je to, že má jak velikost tak i směr. Musí mít obě tyto vlastnosti, aby byla zadána jednoznačně.

Tematický příklad. Vektorovou veličinou je například posunutí. Posunutí nám říká, jak daleko jsme od vychozího (fixního) bodu a také náš směr vzhledem k tomuto bodu.



Tematický příklad. Další vektorovou veličinou je i rychlost v určitém směru, třeba 60 km/h na sever.

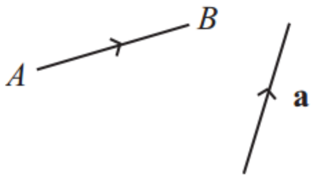
Pokud je zadána jenom velikost, ale ne směr, nejedná se o vektor. Taková veličina se nazývá skalár. Jedním z příkladů skalárů je vzdálenost. Ta nám říká, jak daleko jsme od pevného bodu, ale nedává nám žádné informace o tom, ve kterém směru. Dalším příkladem skalární veličiny je hmotnost.

Důležité tvrzení 1: Rozdíl mezi vektorem a skalárem

Vektor má velikost i směr, a obě tyto vlastnosti musí být uvedeny, abychom věděli, o jaký vektor se jedná. Veličina pouze s velikostí bez směru se nazývá **skalár**.

Zápis vektorových veličin

Vektory můžeme reprezentovat jako orientované úsečky. Obrázek níže ukazuje dva vektory.

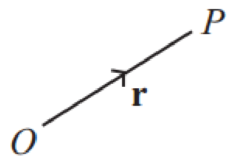


Pro určení směru jsme jsme použili malou šipku. První vektor směřuje z bodu A do bodu B. Kdyby byla šipka obráceně, jednalo by se o **opačný vektor**, čili o vektor z bodu B do bodu A.

Někdy může být vektor označen i malým tučným písmenem, jako například vektor **a** na obrázku. Toto značení se využívá v učebnicích, ale je nepohodlné v psaném textu. Při psaní obyčejně používáme značení šipkou, tedy $\vec{a}$, a čteme „vektor a“.

Polohový vektor

Někdy je vektor vázán k určitému bodu, například k počátku soustavy souřadnic. Takový vektor se nazývá **polohový vektor**. Vychází z počátku a končí v koncovém bodě P. Takže můžeme také říci, že je polohovým vektorem bodu P vzhledem k počátku O. Při psaní jej můžeme značit jako $\vec{OP}$, případně **r**. Oba dva tyto výrazy odkazují na stejný vektor.



Rovnost vektorů

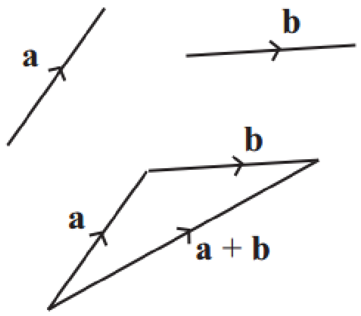
Co to znamená, když se dva vektory rovnají? Znamená to, že délka $\vec{a}$ je stejná jako délka $\vec{b}$, čili mají stejnou velikost. Ale také to znamená, že oba vektory mají stejný směr. Jak to můžeme zapsat stručněji? Pokud mají dva vektory stejný směr, jsou navzájem rovnoběžné a stejně orientované. Což píšeme jako $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Délku vektoru $\vec{AB}$ označujeme svislými čárami, $|AB|$. Podobně pro vektor $\vec{a}$ je jeho délka $|a|$.

Důležité tvrzení 2: Délka a rovnoběžnost

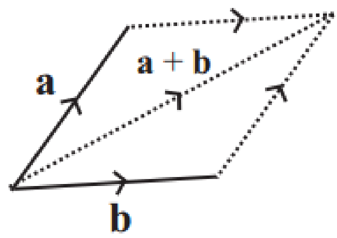
Délka $\vec{AB}$ se zapisuje jako $|AB|$ a délka $\vec{a}$ jako $|a|$. Pokud jsou dva vektory rovnoběžné, píšeme $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Sčítaní vektorů

Jedna z věcí, kterou můžeme s vektory dělat, je sčítat je dohromady. Začneme sčítáním dvou vektorů. Poté, co jsme to udělali, můžeme sčítat libovolný počet vektorů dohromady, a to tak, že sečteme nejdříve první dva a jejich součet přičteme k třetímu a tak dále. Při sčítání dvou vektorů se na ně díváme jako na posunutí. Nejprve provedeme první posun a pak druhý. Takže druhé posunutí musí začínat tam, kde první posunutí skončilo.



Součet $\vec{a} + \vec{b}$ (nebo výslednice, jak se někdy nazývá) je třetí strana v trojuhelníku, který dostaneme, když spojíme $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Existuje i další způsob, jak sčítat dva vektory. Místo toho, aby druhý vektor začínal tam, kde první končí, mohou oba začínat na stejném místě, a pak je doplníme na rovnoběžník. Dostaneme stejný výsledek jako u trojúhelníku, protože jednou z vlastností rovnoběžníku je to, že protilehlé strany jsou si rovnoběžné a jsou ve stejném směru, takže $\vec{b}$ se nachází i v horní části rovnoběžníku. Na obrázku vidíme rovnoběžník rozdělen uhlopříčkou na dva trojuhelníky. Součtem vektorů je uhlopříčka rovnoběžníku neboli třetí strana trojúhelníku.

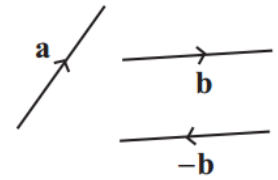


Důležité tvrzení 3: Sčítání vektorů

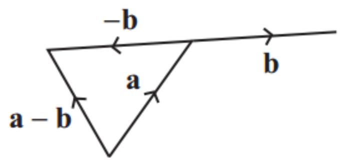
Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ můžeme sčítat tak, že tam, kde končí $\vec{a}$, umístíme začátek $\vec{b}$ a doplníme je na trojúhelník. Případně můžeme postupovat tak, že oba vektory budou začínat na stejném místě a doplníme je do rovnoběžníku. Pak jejich součtem bude jeho uhlopříčka.

Odčítaní vektorů

Jak odečítat dva vektory? Stačí když si rozdíl $\vec{a} - \vec{b}$ přepíšeme do tvaru $\vec{a} + (-\vec{b})$, kdy $-\vec{b}$ má stejnou velikost jako $\vec{b}$ ale jeho směr bude opačný, nazýváme ho proto **opačný vektor** k $\vec{b}$.



Tedy odečíst dva vektory: $\vec{a} - \vec{b}$ znamená připočítat $-\vec{b}$ k $\vec{a}$.

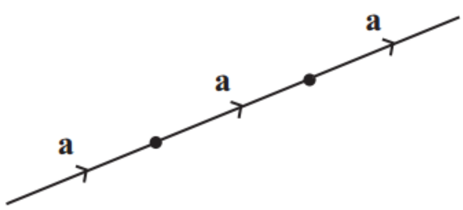


Důležité tvrzení 4: Odčítání vektorů

Odečíst $\vec{a} - \vec{b}$ znamená připočíst opačný vektor $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Násobení vektoru číslem

Co se stane, když sčítáme $\vec{a}$ se sebou samým třeba i několikrát? Dostaneme násobek $\vec{a}$. Například $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$.



Podobně bychom postupovali, kdybychom chtěli n-násobek $\vec{a}$. Sčítali bychom vektor n-krát.

$$n \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n-krat}$$

Důležité tvrzení 5: Násobek vektora $\vec{a}$

Vektor $n \cdot \vec{a}$ má stejný směr jako $\vec{a}$, ale je n-krát delší.

Jednotkový vektor

Ještě nám k vysvětlení zbývá jeden pojem a tím je jednotkový vektor. Jestliže $\vec{a}$ je nějaký vektor, pak symbolem $\hat{\mathbf{a}}$ značíme jednotkový vektor ve směru $\vec{a}$. Jednotkovým vektorem nazýváme takový vektor, jehož délka je 1, čili

$$|\hat{\mathbf{a}}| = 1.$$

Toto značení nám dává další možnost jak zapsat $\vec{a}$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{\mathbf{a}}.$$

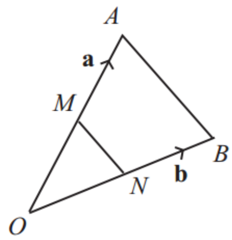
Důležité tvrzení 6: Jednotkový vektor

Jednotkovým vektorem k $\vec{a}$ je $\hat{\mathbf{a}}$ jehož délka je 1 a jeho směr je stejný jako směr $\vec{a}$. Vypočítáme ho jako podíl $\vec{a}$ a jeho délky $|\vec{a}|$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Užití vektorů v geometrii

Tematický příklad. V geometrii se často používá vlastnost střední příčky trojúhelníku. Ukážeme si ji na tomto příkladu: Vezměme si dva body A a B definované vzhledem k počátku soustavy souřadnic O. Označme polohový vektor bodu A jako $\vec{a}$ a polohový vektor bodu B jako $\vec{b}$. Body A a B spojíme do trojuhelníku. Střed úsečky OA označme M, střed úsečky OB označme N a spojme je. Co můžeme říci o úsečkách AB a MN?



Otázku můžeme jednoduše zodpovědet pomocí vektorů. Vektor odpovídajíci úsečce AB je $\vec{AO} + \vec{OB}$. Vidíme, že $\vec{AO}$ je opačným vektorem k vektoru $\vec{a}$, takže je $-\vec{a}$. A vektor $\vec{OB}$ je vlastně vektor $\vec{b}$. Proto

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= (-\vec{a}) + \vec{b} \\ &= \vec{b} - \vec{a}. \end{aligned}$$

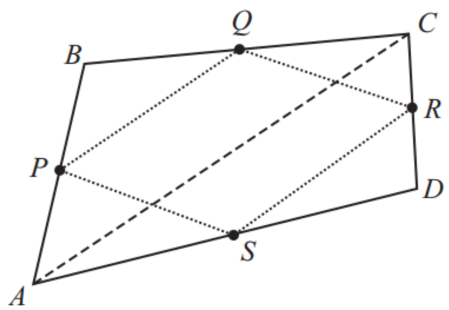
Podobně můžeme vyjádřit $\vec{MN}$ jako $\vec{MO}+\vec{ON}$. Ale co je $\vec{MO}$? Jeho délka je polovinou délky vektoru $\vec{AO}$, je ve stejném směru, takže musí být roven $-\frac{1}{2}\vec{a}$. Obdobně $\vec{ON}$ je ve stejném směru jako $\vec{OB}$, ale jeho délka je poloviční, takže se rovná $\frac{1}{2}\vec{b}$. Proto

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MO}+\vec{ON}\\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a})+\frac{1}{2}\vec{b}\\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right).\end{aligned}$$

Nyní můžeme porovnat $\vec{AB}$ a $\vec{MN}$. Z našich výpočtů je vidět, že $\vec{MN}$ je $\frac{1}{2}\vec{AB}$. Jelikož jde o vektorovou rovnici, říká nám dvě věci. Zaprvé, víme, že pro velikost vektorů platí $\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{AB}$. Také víme, že oba vektory mají stejný směr, tedy $\vec{MN}\parallel\vec{AB}$.

Úsečka MN se nazývá **střední příčka trojúhelníku**. Střední příčka spojuje středy dvou stran trojúhelníku a je rovnoběžná s třetí stranou. Její velikost je polovina této strany.

Tematický příklad. Vlastnosti střední příčky umíme využít při jakýchkoliv čtyřech bodech v prostoru. Označme tyto body A, B, C, D. Jejich spojením vznikne čtyřúhelník. Najděme středy stran čtyřúhelníku a nazvěme je P, Q, R, S. Jaký útvar vznikne, když je spojíme?



K určení útvaru nám pomohou informace z předchozího příkladu. Spojením bodů A a C získáme dva trojúhelníky. PQ je střední příčkou trojúhelníku $\triangle ABC$, proto

$$\vec{PQ}=\frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Podobně SR je střední příčkou trojúhelníku $\triangle ADC$, a tedy

$$\vec{SR}=\frac{1}{2}\vec{AC}.$$

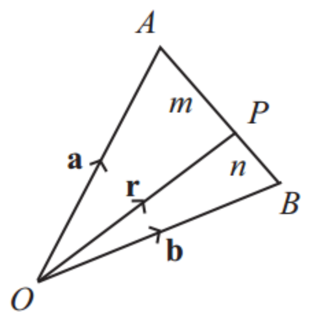
Spojením těchto dvou rovností získáváme

$$\vec{PQ}=\vec{SR}.$$

Tato vektorová rovnice nám poskytuje dvě informace, a to že velikost vektorů $\vec{AC}$ a $\vec{PQ}$ je stejná a také je stejný i jejich směr. Tedy jsou navzájem rovnoběžné. A útvar, který má dvě strany navzájem rovnoběžné a stejně dlouhé, se nazývá rovnoběžník. Proto $PQRS$ musí být rovnoběžník.

Tematický příklad. V tomto příkladu použijeme vektory, abychom odvodili vzorec pro výpočet polohového vektoru.

Mějme dva body A a B, jejich polohové vektory vzhledem k počátku soustavy souřadnic O nechť jsou $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Na úsečce AB vyznačme bod P, který ji dělí v poměru m ku n. Jaký bude polohový vektor bodu P vzhledem k počátku O?



Využijeme podobný postup jako v předešlých příkladech. Víme, že

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} \tag{1}$$

a také, že $\vec{OA} = \vec{a}$. Ale jak můžeme zapsat $\vec{AP}$? Je zřejmé, že $\vec{AP}$ má stejný směr jako $\vec{AB}$ a jejich velikosti jsou v poměru m ku $m+n$.Tudíž

$$\vec{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{AB}. \tag{2}$$

Také víme, že

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{a} + \vec{b}. \tag{3}$$

Nyní můžeme tyto tři poznatky spojit, namísto $\vec{AP}$ v rovnici (1) dosadíme výraz z rovnice (2) a namísto $\vec{AB}$ v rovnici (2) výraz z rovnice (3). Takže vše bude vyjádřeno pouze pomocí $\vec{a}$ a $\vec{b}$

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$

Po úpravě na společného jmenovatele máme

$$\vec{OP} = \frac{(m+n)\,\vec{a} + m\left(\vec{b} - \vec{a}\right)}{m+n}.$$

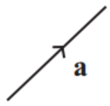
Pokud roznásobíme závorky, členy $m\vec{a}$ a $m\,(-\vec{a})$ se navzájem odečítají a nakonec dostaneme

$$\vec{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}.$$

Tento vzorec nám umožňuje vypočítat souřadnice polohového vektoru bodu P vzhledem k počátku soustavy souřadnic O. Pokud by například m i n byly 1, pak bod P by byl středem úsečky AB, polohový vektor bodu P by byl $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. Dále pokud $m = 2$ a $n = 1$, pak bod P se nachází ve dvou třetinách úsečky AB a jeho polohový vektor je $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$.

Úlohy k procvičení.

1. Vektor $\vec{a}$ je znázorněn níže:



   Načrtněte $2\vec{a}, 3\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}$ a $-2\vec{a}$.

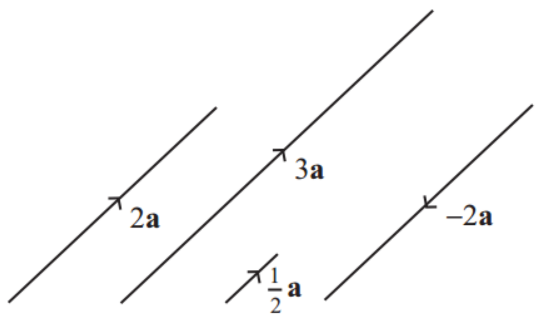
2. V trojúhelníku $\triangle OAB$ označme $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Pomocí $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vyjádřete (a) $\vec{AB}$
   (b) $\vec{BA}$
   (c) $\vec{OP}$, kde P je středem $\vec{AB}$
   (d) $\vec{AP}$
   (e) $\vec{BP}$
   (f) $\vec{OQ}$, kde Q je bod dělící $\vec{AB}$ v poměru $2:3$.

3. Co je jednotkový vektor?

4. Je-li $\vec{e}$ jednotkový vektor, jakou délku má vektor $3\vec{e}$?

5. V trojúhelníku $\triangle ABC$ označme $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CA} = \vec{c}$. Čemu se rovná $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

Řešení.



1.

2. (a) $\vec{b} - \vec{a}$, (b) $\vec{a} - \vec{b}$, (c) $\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, (d) $\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, (e) $\frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, (f) $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

3. Vektor délky 1.

4. 3

5. $\mathbf{0}$