

## Derivace

### Derivace podílu

Existuje speciální pravidlo pro derivaci podílu dvou funkcí a s ním se seznámíme v tomto letáku. Abychom zvládli zde vysvětlenou techniku, je zapotřebí projít mnoho praktických cvičení. Po přečtení tohoto textu bychom měli být schopni:

- vyjádřit pravidlo pro derivaci podílu
- derivovat podíl funkcí

### Úvod

Funkce se často vyskytují jako podíl, tím myslíme, že jedna funkce je dělená jinou funkcí. Například

$$y = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

zapišeme jako  $y = \frac{u}{v}$ , zde platí, že  $u = \cos(x)$  a  $v = x^2$ .

Existuje vzorec, který můžeme použít pro derivaci podílu. V tomto letáku toto pravidlo uvedeme a budeme je používat.

### Derivace podílu

Zmíněné pravidlo říká:

**Důležitá poznámka.**

**Pravidlo pro derivaci podílu:** pokud  $y = \frac{u}{v}$  potom

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Podívejme se, jak vzorec funguje, pokud zkusíme zderivovat  $y = \frac{\cos(x)}{x^2}$ .

**Příklad.** Předpokládejme, že chceme zderivovat  $y = \frac{\cos(x)}{x^2}$ .

Již jsme určili, že  $u = \cos(x)$  a  $v = x^2$ .

Nyní zapišeme derivace těchto dvou funkcí.

$$u' = -\sin(x) \quad v' = 2x$$

A nyní dosadíme tyto výsledky do zadaného vzorce:

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{x^2 \cdot (-\sin(x)) - \cos(x) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

Všimněme si, že je znamínko mínus a  $x$  v obou částech výrazu v čitateli (v horní části zlomku). Takže můžeme vytknout  $-x$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-x(x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x))}{x^4} \\ &= \frac{-(x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x))}{x^3} \end{aligned}$$

Vykrácením činitele  $x$  v čitateli a jmenovateli jsme našli hledanou derivaci.

**Příklad.** Předpokládejme, že chceme zderivovat  $y = \frac{x^2+6}{2x-7}$ .  
Rozpoznáme podíl v této funkci a položíme

$$u = x^2 + 6 \quad v = 2x - 7$$

Derivováním dostaneme

$$u' = 2x \quad v' = 2$$

Vzorec pro derivaci podílu je:

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Takže

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x - 7) \cdot 2x - (x^2 + 6) \cdot 2}{(2x - 7)^2} \\ &= \frac{2(2x^2 - 7x - x^2 - 6)}{(2x - 7)^2} \\ &= \frac{2(x^2 - 7x - 6)}{(2x - 7)^2} \end{aligned}$$

V následujícím příkladě použijeme pravidlo pro derivaci podílu ke zjištění dalšího výsledku.

**Příklad.** Předpokládejme, že chce zderivovat funkci  $y = \operatorname{tg}(x)$ .

Připomeňme si, že platí  $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , takže obdržíme podíl, ve kterém

$$u = \sin(x) \quad v = \cos(x)$$

Tedy

$$u' = \cos(x) \quad v' = -\sin(x)$$

Vzorec pro derivaci podílu je:

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Horní část zlomku může být zjednodušena použitím vzorce  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ . Takže

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Toto může být zapsáno jako funkce  $\sec^2 x$ , protože funkce  $\sec x$  je definována jako  $\frac{1}{\cos x}$ .

**Příklad.** Předpokládejme, že chceme zderivovat funkci  $y = \sec(x)$ .

Funkce  $\sec(x)$  je definována jako  $\frac{1}{\cos(x)}$ , což je podíl.

Položením

$$\begin{aligned} u &= 1 & v &= \cos(x) \\ u' &= 0 & v' &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Vzorec pro derivaci podílu je:

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos(x) \cdot 0 - 1 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Můžeme zapsat tuto odpověď v jiné podobě:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \sec(x)\operatorname{tg}(x) \end{aligned}$$

Nyní máme další standardní výsledek: pokud  $y = \sec(x)$ , potom  $y' = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$ .

**Důležitá poznámka.**

Pokud  $y = \operatorname{tg}(x)$ , potom  $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$       když  $y = \sec x$ , potom  $\frac{dy}{dx} = \sec x \operatorname{tg} x$ .

**Cvičení.** Najděte derivace následujících funkcí:

a)  $\frac{\sin(x)}{x}$    b)  $\frac{\cos(x)}{x^2}$    c)  $\frac{2x+1}{3x-4}$    d)  $\frac{3x-4}{2x+1}$

e)  $\frac{e^{2x}}{x}$    f)  $\frac{e^{-3x}}{x^2+1}$    g)  $\frac{x^2-3}{2x+1}$    h)  $\frac{2x+1}{x^2-3}$

**Odpovědi**

a)  $\frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$    b)  $\frac{-(x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x))}{x^3}$    c)  $\frac{-11}{(3x-4)^2}$    d)  $\frac{11}{(2x+1)^2}$

e)  $\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$    f)  $\frac{-(3x^2+2x+3)e^{-3x}}{(x^2+1)^2}$    g)  $\frac{2(x^2+x+3)}{(2x+1)^2}$    h)  $\frac{-2(x^2+x+3)}{(x^2-3)^2}$