Derivace pomocí logaritmů

V tomto letáku se podíváme na to, jak lze využít logaritmy ke zjednodušení určitých funkcí předtím než je zderivujeme.

Abychom ovládli zde vysvětlenou techniku, je vhodné projít řadou cvičení.

Po přečtení tohoto textu bychom měli být schopni:

- využívat logaritmy ke zjednodušování funkcí před jejich zderivováním

Úvod

V tomto letáku se podíváme na to, jak lze využít logaritmy ke zjednodušení určitých funkcí předtím než je zderivujeme. Pro začátek si připomeňme samotné logaritmy.

Pokud je $y = \ln(x)$ přirozená logaritmická funkce, nebo-li logaritmus se základem e a argumentem x, potom

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

S tímto výsledkem bychom měli být již obeznámeni. Pokud ne, měli bychom se to naučit. Můžeme se odkázat na leták zaměřený na derivace logaritmů a exponenciálních funkcí.

Také budeme potřebovat derivovat $y = \ln(f(x))$, kde $f(x)$ je nějaká funkce o proměnné x. V tom případě

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Důležité tvrzení 1: Derivace logaritmu

$$\text{Pokud } y = \ln(x), \text{ potom } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{pokud } y = \ln(f(x)), \text{ potom } \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Budeme také využívat tato logaritmická pravidla:

Logaritmická pravidla:

$$\log_a(A) + \log_a(B) = \log_a(A \cdot B), \quad \log_a(A) - \log_a(B) = \log_a\left(\frac{A}{B}\right), \quad m \cdot \log_a(A) = \log_a(A)^m$$

Tato pravidla lze využít pro zjednodušení logaritmů o libovolném základu a.

Příklady

Příklad

Předpokládejme, že chceme zderivovat $y = \ln(3x^4 + 7)^5$.

Použitím logaritmických pravidel můžeme zapsat y jako

$$y = 5 \cdot \ln(3x^4 + 7).$$

Toto lze snáze zderivovat protože máme $y = 5 \cdot \ln f(x)$, kde $f(x) = 3x^4 + 7$. Důležité tvrzení uvedené výše nám říká, že

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{12x^3}{3x^4 + 7} = \frac{60x^3}{3x^4 + 7}.$$

Co začalo jako poměrně náročný problém, bylo zjednodušeno použitím logaritmických pravidel před samotným derivováním.

Příklad

Předpokládejme, že chceme zderivovat $y = \ln\left(\frac{1-3x}{1+2x}\right)$.
V tomto příkladu máme logaritmus podílu. Můžeme použít pravidlo $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$ k přepsání na

$$y = \ln(1 - 3x) - \ln(1 + 2x)$$

Obě funkce na pravé straně je snadné zderivovat pomocí poznámky uvedené výše:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{1 - 3x} - \frac{2}{1 + 2x}$$

Odpověď můžeme napsat jako jeden výraz převedením na společného jmenovatele:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(1 + 2x) - 2(1 - 3x)}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{-3 - 6x - 2 + 6x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = -\frac{5}{(1 - 3x)(1 + 2x)}$$

Příklad

Předpokládejme, že chceme zderivovat $y = x^{\sin(x)}$.
Zde se vyskytuje problém, protože zde vystupuje funkce $\sin(x)$ jako mocnina. Zlogaritmováním obou stran a použitím logaritmických pravidel se tomuto můžeme vyhnout následovně:

Zlogaritmováním obou stran dostáváme:

$$\ln(y) = \ln\left(x^{\sin(x)}\right)$$

a použitím třetího logaritmického pravidla ze strany 1:

$$\ln(y) = \sin(x) \cdot \ln(x).$$

Výraz na pravé straně je součin funkcí $\sin(x)$ a $\ln(x)$, který jsme schopni zderivovat pomocí pravidla pro derivaci součinu.

Výraz $\ln(y)$, na levé straně, je nutné zderivovat implicitně. Připomeňme si, že

$$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dy}(\ln(y)) \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Tedy

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sin(x) \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot \cos(x) = \frac{\sin(x) + x \cdot \ln(x)\cos(x)}{x}$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \cdot \left(\frac{\sin(x) + x \cdot \ln(x) \cdot \cos(x)}{x}\right) \\ &= x^{\sin(x)}\left(\frac{\sin(x) + x \cdot \ln(x) \cdot \cos(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

protože $y = x^{\sin x}$.

Příklad
Předpokládejme, že chceme zderivovat $y = \frac{(1-2x)^3}{\sqrt{1+x^2}}$.
Vycházíme z toho, že zlogaritmujeme obě strany, tím dostáváme:

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{(1-2x)^3}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Potom použijeme logaritmických pravidel k přepsání pravé strany na

$$\ln(y) = \ln(1-2x)^3 - \ln\left(\sqrt{(1+x^2)}\right)$$

S využitím dalších logaritmických pravidel a uvědomění si, že $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, obdržíme

$$\ln(y) = 3 \cdot \ln(1-2x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)$$

Derivací obdržíme (nezapomeňme zderivovat levou stranu implicitně)

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 3 \cdot \frac{-2}{1-2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \frac{-6}{1-2x} - \frac{x}{1+x^2} \\ &= \frac{-6(1+x^2) - x(1-2x)}{(1-2x)(1+x^2)} \\ &= \frac{-6-6x^2-x+2x^2}{(1-2x)(1+x^2)} \\ &= \frac{-6-x-4x^2}{(1-2x)(1+x^2)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y\cdot\frac{-6-x-4x^2}{(1-2x)(1+x^2)}\\ &= \frac{(1-2x)^3}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{-6-x-4x^2}{(1-2x)(1+x^2)}\end{aligned}$$

Což můžeme zjednodušit na

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(6+x+4x^2)(1-2x)^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Na těchto příkladech jsme viděli, jak použití logaritmů, k přepsání určitých funkcí do alternativní podoby, může pomoci při jejich derivaci.

Cvičení

1. Určete derivaci následujících funkcí

a) $\ln(x^3+1)$ b) $\ln(\sin(x))$ c) $\ln((x^3+2x+1)^4)$ d) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$ e) $\ln(x^2\cdot\sin(x))$

2. Použitím logaritmů a implicitních derivací určete derivace následujících funkcí

a) $\frac{1-x^2}{\sqrt{1+2x}}$ b) x^x c) $x^{\ln(x)}$ d) $\frac{(1+x^2)^3}{(1-x^3)^2}$ e) x^{ax+b}

Odpovědi

1. a) $\frac{3x^2}{x^3+1}$ b) $\mathrm{cotg}(x)$ c) $\frac{4(3x^2+2)}{x^3+2x+1}$ d) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)(x-1)}$ e) $\frac{2}{x}+\mathrm{cotg}(x)$

2. a) $-\frac{1+2x+3x^2}{(1+2x)^{3/2}}$ b) $x^x\cdot(\ln(x)+1)$ c) $2x^{\ln(x)-1}\ln(x)$

d) $\frac{6x(1+x)(1+x^2)^2}{(1-x^3)^3}$ e) $x^{ax+b-1}\,(ax\cdot(\ln(x)+1)+b)$