Integrování jako opak derivování

V tomto dokumentu budete seznámeni s derivováním běžných funkcí a budete mít možnost vyzkoušet mnoho způsobů derivace. Jedním z nich je proces derivování v opačném pořadí. To znamená, že začneme s danou funkcí, kterou nazýváme $f(x)$ a budeme hledat funkci nebo funkce $F(x)$, které vzniknou po derivaci $f(x)$. To nás přivádí k pojmům primitivní funkce a integrace.

Ke zvládnutí metody, která zde bude vysvětlena, je důležité mít spočtených spoustu praktických cvičení, aby se výpočet stal přirozenou součástí.

Po přečtení tohoto textu byste měli být schopni:

- vysvětlit, co znamená primitivní funkce $F(x)$ a funkce $f(x)$,
- spočítat primitivní funkce pomocí tabulky integrálů,
- spočítat primitivní funkce pomocí tabulky primitivních funkcí,
- pochopit vztah mezi primitivní funkcí a určitým integrálem,
- spočítat jednoduché příklady na určité integrály užitím primitivních funkcí,
- spočítat jednoduché příklady na neurčité integrály.

Obsah

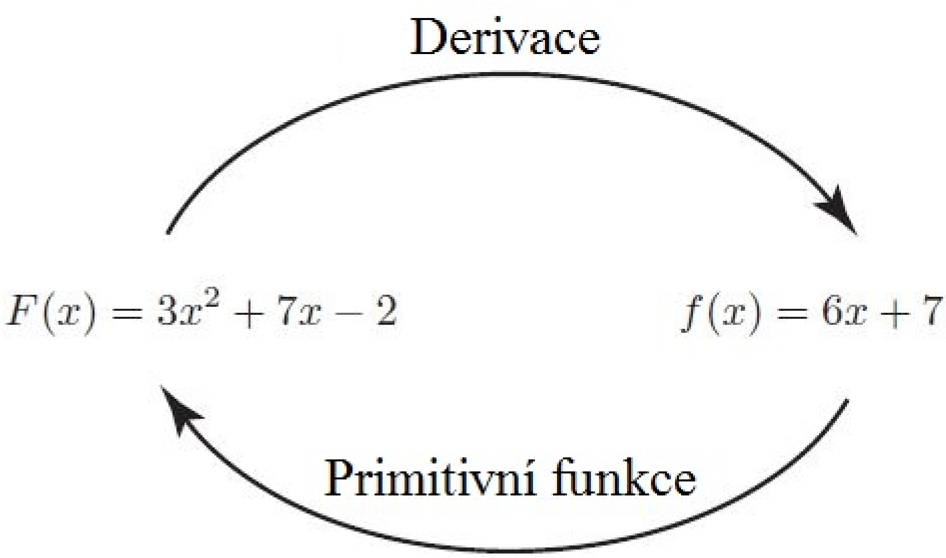
Úvod

V tomto dokumentu začneme s danou funkcí, kterou značíme $f(x)$ a budeme hledat funkci nebo funkce $F(x)$, které mají derivaci rovnu $f(x)$. To nás přivádí k pojmům primitivní funkce a integrace.

V dřívějším dokumentu, *Integrace jako součet*, byla integrace vysvětlena jako postup obdélníkových oblastí. K nalezení integrálu definovaného tímto způsobem bylo nutné počítat limitu součtu. Jedná se o postup, který je obtížný a nepraktický. V tomto dokumentu uvidíme, jak lze nalézt integrál opačným postupem k derivování - tedy nalezením primitivní funkce.

Primitivní funkce - "antiderivace"

Uvažujeme funkci $F(x) = 3x^2 + 7x - 2$. Předpokládejme, že derivaci budeme psát jako $f(x)$, tedy $f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$. Už víte, jak najít derivaci derivováním člen po členu, abychom získali $f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 6x + 7$. Tento postup je zobrazen na Obrázku 1.



Obrázek 1. Funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Předpokládejme nyní, že budeme postupovat obráceně a uvažujme, které funkce by mohly mít derivaci $6x+7$. Je zřejmé, že jedna z možných odpovědí na tuto otázku je funkce $3x^2+7x-2$. Říkáme, že $F(x) = 3x^2 + 7x - 2$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(x) = 6x + 7$.

Existují však další funkce, které mají derivaci $6x + 7$. Např.

$$3x^2 + 7x + 3, \qquad 3x^2 + 7x, \qquad 3x^2 + 7x - 11.$$

Důvodem, proč všechny tyto funkce mají stejnou derivaci, je, že konstanta při derivování zmizí. A proto všechny z nich jsou primitivní funkcí funkce $6x+7$. Všechny ostatní primitivní funkce k funkci $f(x)$ se tedy dají získat jednoduchým přidáním odlišné konstanty. Jinými slovy, jestliže

$F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak také $F(x) + C$ je primitivní funkcí k $f(x)$ pro jakoukoliv libovolnou konstantu C.

Příklad

(a) Derivujte $F(x) = 4x^3 - 7x^2 + 12x - 4$.

(b) Napište několik primitivních funkcí k funkci $f(x) = 12x^2 - 14x + 12$.

Řešení

(a) Derivováním $F(x) = 4x^3 - 7x^2 + 12x - 4$ najdeme $f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 14x + 12$. Můžeme vyvodit, že primitivní funkce k $12x^2 - 14x + 12$ je $4x^3 - 7x^2 + 12x - 4$.

(b) Primitivní funkce budou ve tvaru $F(x) + C$, kde C je konstanta. Následuje několik příkladů primitivních funkcí k $f(x)$:

$$4x^3 - 7x^2 + 12x - 4, \qquad 4x^3 - 7x^2 + 12x - 10, \qquad 4x^3 - 7x^2 + 12x, \qquad 4x^3 - 7x^2 + 12x + 3.$$

Z těchto příkladů můžeme odvodit následující důležitou poznámku.

Důležité tvrzení

Funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pokud platí $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.
Jestliže je $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak také platí $F(x) + C$ pro libovolnou konstantu C.

Primitivní funkce můžeme odvodit tak, že při čtení tabulky derivací budeme postupovat zprava doleva, namísto zleva doprava. Nicméně, v praxi jsou běžně dostupné tabulky primitivních funkcí, např. Tabulka 1.

$f(x)$	$F(x)$
k (konstanta)	$kx + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin mx$	$-\frac{1}{m}\cos mx + C$
$\cos mx$	$\frac{1}{m}\sin mx + C$
e^{mx}	$\frac{1}{m}\mathrm{e}^{mx} + C$

Tabulka 1. Tabulka běžně používaných primitivních funkcí.

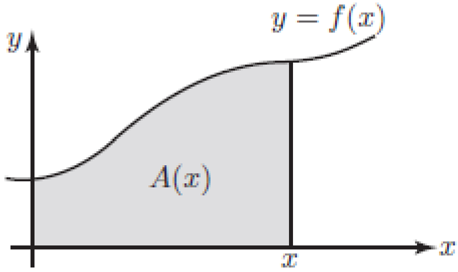
Příklady 1.

Použijte Tabulku 1 k nalezení $F(x)$:

1. $f(x) = 5$ 2. $f(x) = x^8$ 3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ 5. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ 6. $\cos \frac{1}{2}x$.

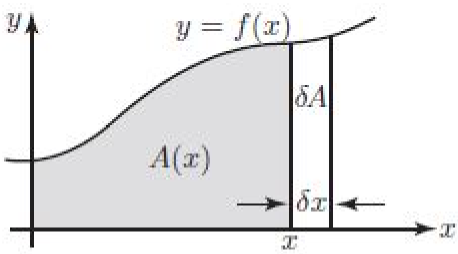
Spojitost s integrací jako součtem

Uvažujme část grafu $y = f(x)$ napravo od osy y, jak je znázorněno na Obrázku 2. Předpokládejme, že $f(x)$ leží úplně nad x osou. Je zřejmé, že oblast ohraničená grafem a osou x závisí na tom, jak daleko doprava se pohybujeme. Tato oblast, kterou označíme A, bude záviset na hodnotě x, $A = A(x)$.



Obrázek 2. Plocha ohraničená grafem závisí na tom, jak daleko doprava se pohybujeme, tedy $A = A(x)$.

Předpokládejme, že se budeme pohybovat dále směrem doprava, jak je znázorněno na Obrázku 3. Tuto rozšířenou část označíme δA. Pak δA představuje oblast vytvořenou přírůstkem x o δx. Všimněte si, že pak $\delta A = A(x + \delta x) - A(x)$.



Obrázek 3. Přírůstek oblasti je $\delta A \approx f(x)\,\delta x$.

Tento přírůstek δA může být aproximován za předpokladu, že má tvar obdélníku o výšce $y = f(x)$ a šířce δx, tedy

$$\delta A \approx f(x)\delta x$$

nebo

$$\frac{\delta A}{\delta x} \approx f(x).$$

Pro limitu δx blížící se nule dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Pokud je dána funkce $f(x)$ jako derivace $A(x)$, pak $A(x)$ musí být primitivní funkcí k $f(x)$, tzn.

$$A(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

V textu uvedeném výše jsme psali, že $F(x)+C$ popisuje všechny funkce, které jsou primitivními funkcemi $f(x)$. Nyní budeme hledat konkrétní primitivní funkci zvolením konkrétní hodnoty C. Tu získáme tak, že $x = 0$ je oblast ohraničená nulou tak, že $0 = F(0) + C$ a tím získáme hodnotu C, tedy $C = -F(0)$.

Tento výsledek můžeme použít následovně: je dána funkce $f(x)$, pak rovnice (1) nám říká, že obsah plochy pod grafem můžeme spočítat pomocí primitivní funkce $F(x)$.

Předpokládejme nyní, chceme určit plochu pod grafem mezi $x = a$ a $x = b$, jak je znázorněno na Obrázku 4. Celková plocha od $x = 0$ po $x = b$ je dána

$$A(b) = F(b) + C.$$

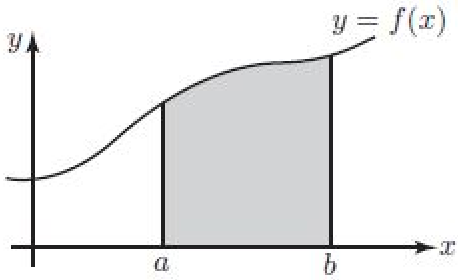
Celková plocha po $x = a$ je dána

$$A(a) = F(a) + C.$$

Rozdíl mezi oblastmi a a b je

$$A(b) - A(a) = F(b) - F(a).$$

Všimněte si, že se konstanta C vyruší.



Obrázek 4. Plocha mezi a a b je $A(b) - A(a)$.

Důležité tvrzení

Pokud funkce $f(x)$ leží nad osou x, pak plochu pod $y = f(x)$ v mezích a a b určíme nalezením primitivní funkce $F(x)$ a $x = a$, $x = b$. Oblast je

$$A = F(b) - F(a).$$

V dokumentu nazvaném **Integrace jako součet** jsme se podívali na to, jak by bylo možné nalézt plochu pod křivkou sečtením obdélníkových ploch. Bylo ukázáno, že oblast pod $y = f(x)$ mezi $x = a$ a $x = b$ se určí

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\delta x.$$

Tento limitní postup můžeme přepsat

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a definovat jako **určitý integrál** funkce $f(x)$ v mezích a a b.

Takže nyní známe dva způsoby, jak najít oblast pod křivkou, přičemž jedním z nich je limita součtu nalezením určitého integrálu, druhým je nalezení primitivní funkce. Obecně platí, že nalezení limity součtu je obtížné, zatímco nalezení primitivní funkce je mnohem jednodušší. Takže v budoucnu se můžeme vyhnout složitějšímu způsobu a určit integrály použitím primitivní funkce.

Důležité tvrzení

Jestliže $F(x)$ je jakákoliv primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Příklad

Chceme spočítat $\lim_{\delta x\to 0} \sum_{x=0}^{x=1} x^2\,\delta x$. Limitu součtu určíme jako součet malých obdélníků k nalezení plochy pod $y = x^2$ mezi $x = 0$ a $x = 1$. Tato limita definuje určitý integrál

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Podle tvrzení výše můžeme spočítat tento integrál nalezením primitivní funkce x^2. Ta je $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Dosadíme za $x = 1$ a $x = 0$ a určíme rozdíl obou výsledků:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1^3}{3} + C\right) - \left(\frac{0^3}{3} + C\right)\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Všimněte si, že konstanta C se vyrušila - to se stane vždy, a proto při řešení určitých integrálů budeme konstantu C vynechávat a předchozí výpočet budeme psát následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Obecně píšeme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_a^b\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Příklady 2

Spočítejte následující limity součtu užitím primitivních funkcí.
1. Najděte $\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=0}^{x=1} x^3 \, \delta x$.
2. Najděte $\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=1}^{x=2} x^4 \, \delta x$.
3. Najděte $\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=0}^{x=1} \mathrm{e}^{2x} \, \delta x$.

Neurčité integrály

Jak jsme mohli vidět, určitý integrál je úzce spojen s hledáním primitivní funkce. Z tohoto důvodu je běžné, že hledáním primitivní funkcí obecně myslíme integraci. Takže obrácený proces derivace je běžně označován jako integrace.

V příkladu na straně 2 jsme hledali primitivní funkci k $f(x) = 12x^2 - 14x + 12$. Použitím integračního zápisu bychom běžně psali

$$\int (12x^2 - 14x + 12)\mathrm{d}x = 4x^3 - 7x^2 + 12x + C$$

a primitivní funkci nazvali **neurčitý integrál** funkce $12x^2 - 14x + 12$ podle x. Konstanta C se nazývá **integrační konstanta**. Tabulka primitivních funkcí, Tabulka 1, se často nazývá tabulka integrálů.

Důležité tvrzení

Neurčitý integrál funkce $f(x)$, $\int f(x)\mathrm{d}x$, je množina funkcí tvaru Je dán $F(x)+C$, kde $F(x)$ je jakákoliv primitivní funkce k $f(x)$ a C je libovolná konstanta.

Určitý integrál funkce $f(x)$ v mezích a a b, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, je číslo, které za splnění určitých podmínek můžeme spočítat ze vzorce $F(b)-F(a)$, kde $F(x)$ je jakákoliv primitivní funkce k $f(x)$.

V tomto dokumentu jsme popsali, jak provést opačný postup k derivování, což vede k primitivní funkci. Také jsme viděli, jak můžeme použít primitivní funkce k nalezení integrálů. V dalších dokumentech se můžete naučit, jak integrovat mnohem komplexnější funkce, kterých se využívá například ve strojírenství a přírodních vědách.

Příklady 3.

Použijte Tabulku 1 k nalezení následujících integrálů:

1. $\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ 2. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x$ 3. $\int \cos 7x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$ 5. $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ 6. $\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x$

Řešení

Příklady 1.

1. $5x + C$ 2. $\frac{x^9}{9} + C$ 3. $-\frac{1}{x} + C$
4. $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$ 5. $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C$ 6. $2\sin\frac{1}{2}x + C$.

Příklady 2.

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{31}{5}$ 3. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Příklady 3.

1. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$ 2. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ 3. $\frac{1}{7}\sin 7x + C$

4. $-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$ 5. $-\frac{1}{2x^2} + C$ 6. $\frac{2x^{3/2}}{3} + C$.