MATH AND STATS SUPPORT CENTRE

sigma

norway grants

Průběh funkce I

Maxima a minima funkce

V této jednotce ukážeme jak derivování může být užitečné pro hledání minimálních a maximálních hodnot funkce.

Po přečtení tohoto letáku nebo shlédnutí instruktážního videa byste měli být schopni:

- použít derivaci k nalezení bodů, ve kterých je směrnice tečny rovna nule
- určit stacionární body funkce
- rozhodnout zdali je stacionární bod lokálním extrémem

Obsah

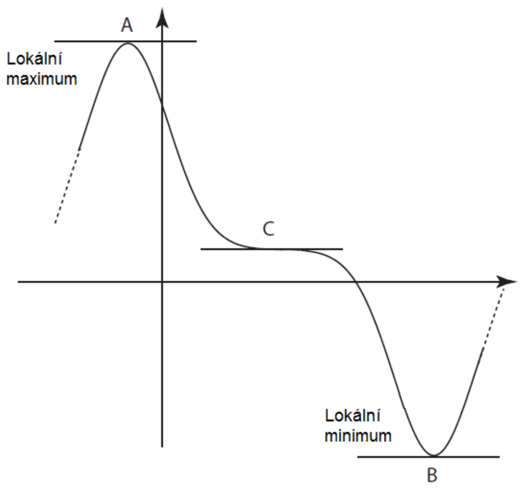
Úvod

Protože derivace udává informaci o sklonu tečny v daném bodě grafu funkce, můžeme tak najít body, ve kterých je sklon roven nule, t.j. tečna je rovnoběžná s osou x. Uvidíme, že tyto body jsou často spojovány s nejmenší nebo největší hodnotou funkce, případně s nejmenší nebo největší hodnotou v okolí takového bodu. Mnoho aplikačních věd (ekonomie, fyzika, technika, atd.) se zajímá o zjištění právě takových bodů. Důvody zjištění takových bodů jsou např. maximalizace zisku, maximalizace výkonu, minimalizace ztrát.

Stacionární body

Jestliže použijeme matematiky k modelování reálného světa, často používáme fyzikální veličiny jako **proměnné**. Potom **funkce** používáme k popisu změn těchto proměnných. Různí odborníci se zajímají o monotónnost funkce a především o místa, kde dochází ke změně monotónnosti. Různé kalkulátory a programy umí vykreslit danou funkci, ale chceme-li vyjádřit přesné hodnoty, je zapotřebí použít znalosti z diferenciálního počtu. V této sekci si vysvětlíme, jak najít tyto body takovýmto způsobem.

Uvažujme graf funkce $y(x)$, zobrazený na Obrázku 1. V bodech označených jako A, B a C jsou naznačeny tečny, které jsou rovnoběžné s osou x. To znamená, že derivace dané funkce je v bodech A, B, C rovna nule.



Obrázek 1. Derivace funkce je rovna nule v bodech A, B, C

Víme, že sklon směrnice tečny grafu přímky je dán jako $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Následně, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ v bodech A, B a C. Všechny tyto body se nazývají **stacionární body**.

Nový pojem 1: Stacionární bod

Každý bod, ve kterém směrnice tečny grafu funkce je rovna nule, se nazývá **stacionární bod**.
Stacionární body nalezneme tak, že řešíme rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

Lokální extrém

Nový pojem 2: Lokální minimum/ maximum

Bod A na Obrázku 1. se nazývá **lokální maximum**, protože v jeho okolí není žádný bod s vyšší funkční hodnotou. Bod B na Obrázku 1. se nazývá **lokální minimum**, protože v jeho okolí není žádný bod s nižší funkční hodnotou.

Vraťme se znovu k Obrázku 1. Všimněme si, že se křivka v bodě A mění z rostoucí na klesající a v bodě B z klesající na rostoucí. Tedy tyto dva stacionární body se nazývají **lokální extrémy**. Bod C není lokální extrém, křivka sice klesá zleva až do bodu C, ale pak napravo od C zase klesá, proto se tedy nejedná o lokální extrém.
Jestliže existuje derivace v každém bodě funkce, pak můžeme říct, že

- všechny lokální extrémy jsou zároveň stacionární body.
- ale všechny stacionární body nejsou lokální extrémy (např. bod C).

Jinými slovy, existují body, pro které platí $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, přesto nejsou lokálními extrémy.

Důležité tvrzení 1: Lokální extrémy

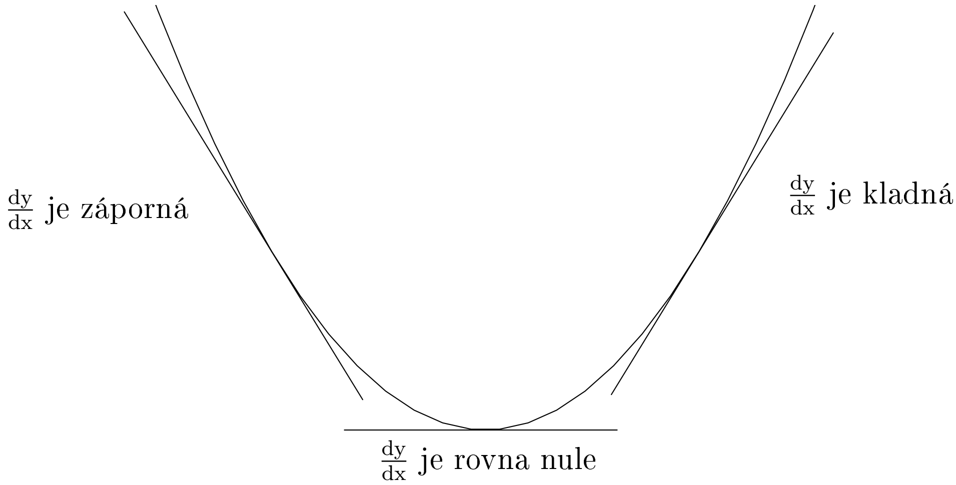
Pokud v bodě lokálního extrému existuje derivace, platí rovnost $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

Ne všechny body, ve kterých platí $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, jsou lokální extrémy, t.j. ne všechny stacionární body jsou vždy lokální extrémy.

Význam druhé derivace ve stacionárním bodu

Lokální minimum

Přemýšlejme o tom, co se stane s hodnotou směrnice tečny grafu funkce, jestliže procházíme graf zleva doprava přes lokální minimum, t.j. s nárůstem x. Pozorně si prohlédneme Obrázek 2. pro snadné pochopení.



Obrázek 2. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ přechází ze záporné hodnoty přes nulu až ke kladné hodnotě.

Všimněme si, že nalevo od minima je funkce klesající, proto má tečna zápornou směrnici. V lokálním minimu se derivace rovná nule a tečna je rovnoběžná s osou x. Napravo od mimina je funkce rostoucí, proto má tečna kladnou směrnici. Toto pozorování můžeme použít ke stanovení typu lokálního extrému.

K určení typu lokálního extrému můžeme také využít **druhou derivaci** funkce. Je-li druhá derivace ve stacionárním bodě kladná, pak ve stacionárním bodě nastává lokální minimum.

Důležité tvrzení 2: Lokální minimum

Je-li $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ v bodě x_0 a je-li $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} > 0$ v tom samém bodě x_0, pak v bodě nastává lokální minimum.

Je důležité zmínit, že tento test pro určení minima není rozhodující. Je tu možnost, že stacionární bod může být lokálním minimem i když $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$.

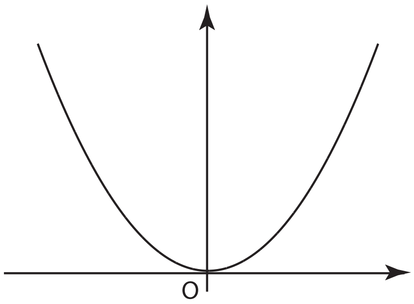
Tématický příklad. Uvažujme příklad, kde máme funkci $y = x^4$. Graf této funkce je na Obrázku 3. Je zřejmé, že lokální minimum funkce je v bodě $x = 0$.
První derivace

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3$$

a je jasné, že derivace je rovna nule pro $x = 0$.
Druhá derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2,$$

je také rovna nule pro $x = 0$. Přesto v bodě $x = 0$ má funkce $y = x^4$ lokální minimum.

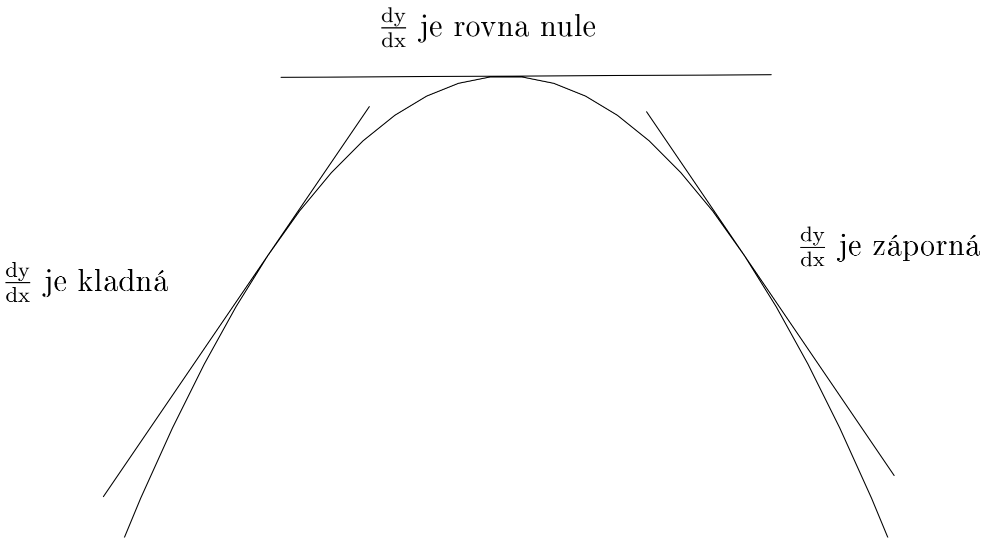


Obrázek 3. Funkce $y = x^4$.

Postup, jak určit zda se jedná o lokální extrém je podrobně vysvětlen v poslední sekci.

Lokální maximum

Přemýšlejme o tom, co se stane s hodnotou směrnice tečny grafu funkce jestliže procházíme graf zleva doprava tentokrát přes lokální maximum, t.j. s nárůstem x. Pozorně si prohlédneme Obrázek 4.



Obrázek 3. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ přechází ze záporné hodnoty přes nulu až ke kladné hodnotě.

Všimněme si, že nalevo od maxima je funkce rostoucí, proto má tečna kladnou směrnici (tedy i derivaci). V lokálním maximu se derivace rovná nule a tečna je rovnoběžná s osou x. Napravo od maxima je funkce klesající, proto má tečna zápornou směrnici. Toto pozorování můžeme použít ke stanovení typu lokálního extrému.

K určení typu lokálního extrému můžeme také využít **druhou derivaci** funkce. Je-li druhá derivace ve stacionárním bodě záporná, pak ve stacionárním bodě nastává lokální maximum.

Důležité tvrzení 3: Lokální maximum

Je-li $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ v bodě x_0 a je-li $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} < 0$ v tom samém bodě, pak v bodě nastává lokální maximum.

Užitečná poznámka. Stejně jako u lokálního minima: Je důležité zmínit, že tento test pro určení maxima není rozhodující. Je tu možnost, že stacionární bod může být lokálním maximem i když se druhá derivace rovná nule.

Důležité tvrzení 4: Druhý test derivace shrnutí

Je-li $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} > 0$, pak je stacionární bod lokálním minimem.

Je-li $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} < 0$, pak je stacionární bod lokálním maximem.

Je-li $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$, pak neumíme rozhodnout zdali je bod lokálním minimem nebo lokálním maximem.

V případě, že $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$, nemáme potřebné informace k tomu abychom rozhodli a volíme alternativní test. (Uvedený v poslední sekci.)

Příklad. Předpokládejme, že chceme najít stacionární body a určit lokální maxima a lokální minima funkce $y = x^3 - 3x + 2$.

Řešení. Potřebujeme najít body podezřelé z extrémů, tedy stacionární body a následně rozhodnout zda se jedná o lokální minimum či maximum. Tedy danou funkci zderivujeme.

$$y = x^3 - 3x + 2 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3$$

Nyní derivaci a položíme rovnou 0.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3(x^2 - 1) &= 0 \\ 3(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnost výše je splněna, když $x - 1 = 0$ nebo $x + 1 = 0$ tedy

$$x = 1 \qquad \text{nebo} \qquad x = -1.$$

Našli jsem tedy x-ové souřadnice bodů grafu funkce, ve kterých $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Máme dva stacionární body. Potřebujeme znát k x-ovým souřadnicím také souřadnice y. Dosadíme tedy za x v původní funkci $y = x^3 - 3x + 2$.

když $x = 1$: $\quad y = 1^3 - 3(1) + 2 = 0.$

když $x = -1$: $\quad y = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4.$

Abychom to shrnuli, máme tedy dva stacionární body

$$[1, 0] \qquad \text{a} \qquad [-1, 4].$$

Dále potřebujeme určit jestli se jedná o lokální minimum či lokální maximum, nebo o možnost, že stacionární bod není lokálním extrémem (jako v případě bodu C na Obrázku 1).

Víme, že první derivace $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3$. Derivujeme znovu již zderivovanou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3$ a získáme druhou derivaci

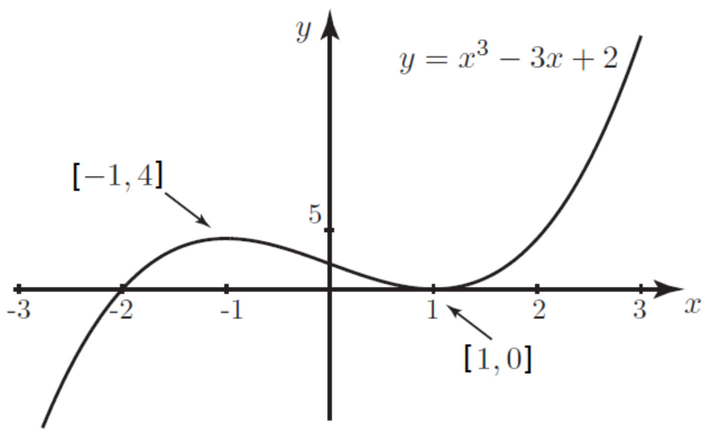
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6x.$$

Teď můžeme začít testovat, jestli se jedná o lokální minimum nebo lokální maximum.

Když $x = 1$: $\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6x = 6 \cdot (1) = 6$. Nemáme opravdový zájem o tuto hodnotu. Co je pro nás důležité, je její znaménko. Protože znaménko je kladné, můžeme s jistotou prohlásit, že bod $[1, 0]$ je lokální minimum.

Když $x = -1$: $\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6x = 6 \cdot (-1) = -6$. Znovu je pro nás důležité znaménko. To je nyní záporné, proto bod $[-1, 4]$ je lokální maximum.

Na závěr si prostudujeme Obrázek 5. Graf funkce $y = x^3 - 3x + 2$, kde můžeme najít oba lokální extrémy.



Obrázek 5. Graf funkce $y = x^3 - 3x + 2$.

Určení minima a maxima bez využití druhé derivace

Příklad. Předpokládejme, že chceme najít lokální extrémy funkce $y = \dfrac{(x-1)^2}{x}$ a rozhodnout, zda se jedná o lokální minimum nebo maximum.

Řešení. Nejprve ze všeho potřebujeme zjistit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

V tomto případě použijeme podílové pravidlo pro derivování.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x \cdot 2(x-1) - (x-1)^2 \cdot 1}{x^2}.$$

To je ale poměrně komplikovaný výsledek. Než se pustíme do násobení, můžeme vytknout. Pak

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x \cdot 2(x-1) - (x-1)^2 \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(2x-(x-1))}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.\end{aligned}$$

Teď položíme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ rovno nule pro nalezení stacionárních bodů.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0$$

Připomeňme, že zlomek se rovná nule právě tehdy, když se jeho čitatel rovná nule. Proto

$$(x-1)(x+1) = 0$$

Z toho plyne, že $x - 1 = 0$ nebo $x + 1 = 0$, a z těchto rovnic dále platí, že

$$x = 1 \qquad \text{nebo} \qquad x = -1.$$

Najdeme y-ové souřadnice stacionárních bodů:

<u>Když $x = 1$</u>: $\quad y = 0.$

<u>Když $x = -1$</u>: $\quad y = \dfrac{(-2)^2}{-1} = -4.$

Abychom to shrnuli, máme dva stacionární body

$$[1, 0] \qquad \text{a} \qquad [-1, -4].$$

Dále máme určit typ stacionárního bodu. Mohli bychom použít druhou derivaci jako v předchozím příkladě. Výpočet druhé derivace je zde poněkud pracnější, proto se podíváme na to, jak rozhodneme o typu lokálního extrému bez použití druhé derivace.

Nejprve uvažujme bod $x_1 = -1$. Podíváme se na to co se děje v okolí tohoto bodu, tedy před a za bodem. Vysvětlíme nejasné termíny "napravo"a "nalevo"od bodu na ose $x = -1$. Matematické vyjádření těchto termínů spočívá v tom, že máme libovolně malé kladné číslo ε, pak můžeme okolí před bodem zapsat jako interval $(-1-\varepsilon, -1)$ a okolí za bodem jako interval $(-1, -1+\varepsilon)$. Např. Jeli $\varepsilon = 0,1$, pak intervalem před bodem na ose x rozumíme $(-0,9, -1)$.

Podívejme se na $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; není pro nás důležitá hodnota, ale znaménko.

Když $x = -1 - \epsilon$, zjistíme, že $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro -1.1 je kladná.

Když $x = -1$ již víme, že $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$=0.

Když $x = -1 + \epsilon$, zjistíme, že $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro -0.9 je záporná.

Shrneme všechny tyto informace v Obrázku 6.

	$x = -1 - \epsilon$	$x = -1$	$x = -1 + \epsilon$
znaménko $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$+$	0	$-$
tvar grafu	$\nearrow$	$\longrightarrow$	$\searrow$

Obrázek 6. Chování grafu v blízkosti bodu -1

Obrázek 6 ukazuje, že stacionární bod $[-1, -4]$ je lokálním maximem.

To stejné vypočítáme i pro bod $[1, 0]$. Provedeme stejnou analýzu pří posuzování znamének $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro $x = 1 - \epsilon$, $x = 1$, a $x = 1 + \epsilon$. Výsledky jsou shrnuty na Obrázku 7.

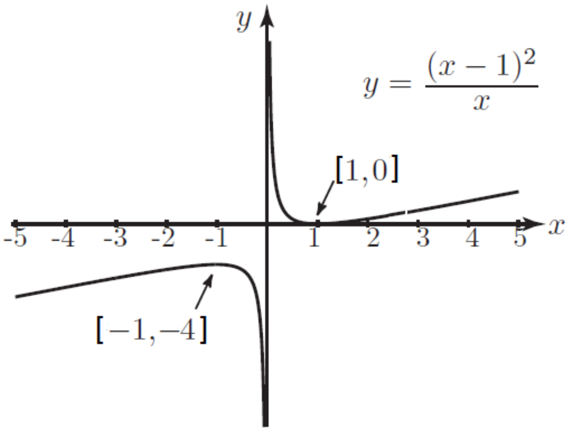
	$x = 1 - \epsilon$	$x = 1$	$x = 1 + \epsilon$
znaménka $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$-$	0	$+$
tvar grafu	$\searrow$	$\longrightarrow$	$\nearrow$

Obrázek 7. Chování grafu v blízkosti bodu 1

Tedy víme, že bod $[1, 0]$ je lokálním minimem.

Takto určujeme lokální minima/maxima, když je druhá derivace v bodech podezřelých z extrému rovna nule.

Pro kompletnost ještě přidáváme graf funkce $y = \frac{(x-1)^2}{x}$ na Obrázku 8, kde vidíme lokální extrémy.



Obrázek 8. Graf funkce $y = \dfrac{(x-1)^2}{x}$

Cvičení. Nalezněte lokální extrémy funkcí.

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 2. $y = x^2 + 4x + 1$, 3. $y = 12x - 2x^2$, 4. $y = -3x^2 + 3x + 1$,

5. $y = x^4 + 2$, 6. $y = 7 - 2x^4$, 7. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, 10. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$.

Odpovědi.

1. Minimum v $(2, -2)$, 2. Minimum v $(-2, -3)$, 3. Maximum v $(-3, -54)$,
4. Maximum v $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$, 5. Minimum v $(0, 2)$, 6. Maximum v $(0, 7)$,
7. Maximum v $(1, 5)$, minimum v $(2, 4)$, 10. Maximum v $(-1, 0)$, minimum v $(3, 8)$.