Aplikace extrémů funkce

V běžném životě často hledáme optimální řešení konkrétního problému. Jako je například určení maximálního zisku, nalezení nejkratší cesty, největšího objemu. Právě v těchto příkladech se obracíme na diferenciální počet. Jak postupujeme při řešení takovýchto otázek, ukazují následující příklady.

Příklad. Jezdecký kůň potřebuje výběh ve tvaru pravoúhelníku o ploše $100m^2$. Kolik metrů elektrického ohradníku musíte koupit k realizaci takového výběhu, abyste utratili co nejméně? Předpokládejme, že el. ohradník je drát a cena se udává za jeden metr délky.

Řešení. Vzoreček pro výpočet plochy pravoúhelníku je $S = a \cdot b$. Jestliže chceme hledat minimální náklady na koupi ohradníku, potřebujeme znát i vzoreček pro obvod ohrady $O = 2(a+b)$. Potřebujeme najít funkci, která popisuje velikost obvodu v závislosti na obsahu. Vyjádříme ze vzorečku $S = a \cdot b$ délku strany $a = \frac{S}{b}$. Dosadíme do vzorečku pro obvod: $O = 2 \cdot \left(\frac{S}{b} + b\right)$. Teď můžeme formalizovat úlohu, tedy sestavíme funkci:

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{100}{x} + x\right).$$

Určíme derivaci funkce:

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}.$$

Funkce může mít minimum v bodech, ve kterých je derivace rovna nule. Řešme tedy rovnici:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2 - \frac{200}{x^2} &= 0 \\ 2x^2 &= 200 \\ x &= \pm\, 10 \end{aligned}$$

Zápornou hodnotu nebereme v úvahu, protože neexistuje záporná délka. Tedy $b = 10$ ze vzorečku $S = a \cdot b$ pro $S = 100$ je zřejmé, že $a = 10$. Obvod ohrady a tím i náklady budou nejnižší právě tehdy, když ohrada bude ve tvaru čtverce o straně $a = 10$. Pak je obvod $O = 2(10 + 10) = 40m$.

Příklad. Parník plující rovnoměrnou rychlostí v má spotřebu paliva $0,3+0,00002v^3$ za hodinu. Jakou rychlostí má plout, aby jeho spotřeba byla co nejmenší.

Řešení. Označme spotřebu paliva Sp ta je rovna $0,3 + 0,00002v^3$. Najdeme funkci, která vyjadřuje spotřebu paliva. Uvažujme, že parník bude plout nějakou dobu t, pak funkce spotřeby je

$$f_{Sp}(v) = Sp \cdot t.$$

Jestliže dosadíme za Sp a čas t vyjádříme jako podíl dráhy a rychlosti získáme

$$f_{Sp}(v) = 0,3 + 0,00002v^3 \cdot \frac{s}{v}.$$

Minimální spotřeba nastane v místě lokálního minima námi stanovené funkce.
Tedy určíme derivaci funkce f_{Sp}:

$$f'_{Sp}(v) = \frac{-0,3s}{v^2} + 0,00004sv.$$

Derivaci položíme rovno nule, tedy $\frac{-0,3s}{v^2} + 0,00004s = 0$. Rovnost je splněna právě tehdy, když

$$v = 19,57.$$

Parník musí plout rychlostí $v = 19,57 \ km/h$.

Příklad. Kino promítá film jen tehdy, když si koupí lístek 10 a víc diváků. V takovém případě stojí vstupenka 150 Kč. Jestliže si koupí lístek víc jak 80 diváku, je za každého diváka nad 80 cena vstupenky snížena o 1, 5 Kč všem divákům. Do promítacího sálu se vejde maximálně 150 diváků. Při jakém počtu diváků má kino největší zisk?

Řešení. Počet diváků označme jako x. Je evidentní, že $x \in \langle 10, 150\rangle$. Najdeme funkci, která vyjadřuje cenu vstupenky, kdy je počet diváku větší jako 80.
Jeli x počet diváků, pak $x - 80$ je počet diváků nad 80. Cena vstupenky je v tomto případě je $150 - (x - 80) \cdot \frac{3}{2}$ Kč. Po úpravě máme $\frac{540-3x}{2}$.
Teď můžeme sestavit funkci popisující zisk kina v závislosti na počtu diváků. Tedy formalizujme úlohu:

$$f(x) = \begin{cases} 150x & \text{pro } x \in \langle 10, 80\rangle \\ (\frac{540-3x}{2})x & \text{pro } x \in (80, 150\rangle \end{cases}$$

Poznamenejme, že funkce je spojitá na celém definičním oboru (i v bodě 80). Určíme derivaci funkce:

$$f'(x) = \begin{cases} 150 & \text{pro } x \in (10, 80) \\ \text{neex.} & \text{pro } x = 80 \\ (270 - 3x) & \text{pro } x \in (80, 150) \end{cases}$$

Funkce může mít maximum v bodech, ve kterých je první derivace nulová, nebo kde neexistuje; k ověření existence maxima použijeme znaménko 1. derivace.

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \text{ pro } x = 90, \\ &f'(x) > 0 \text{ pro } x \in (10, 80) \text{ a } \text{ pro } x \in (80, 90), \\ &f'(x) < 0 \text{ pro } x \in (90, 150). \end{aligned}$$

Funkce roste a spolu s ní zisk spolu s počtem diváků a ž k devadesátému návštěvníkovi, tam dosahuje svého maxima a s dalšími návštěvníky klesá až k počtu 150 návštěvníků. Při devadesáti návštěvnících je zisk 12 150 Kč. Vskutku

$$f(90) = \left(\frac{540 - 3 \cdot 90}{2}\right) 90 = 12\,150.$$

Poznamenejme, že absolutního minima dosáhne funkce v některém z krajních bodů intervalu:

$$f(10) = 150 \cdot 10 = 1\,500 \qquad f(150) = \left(\frac{540 - 3 \cdot 150}{2}\right) 150 = 6\,750.$$

Nejmenší zisk zaznamená kino při návštěvnosti 10. diváků.

Cvičení.

1. Číslo 32 rozložte na dva sčítance, tak aby jejich součin byl co největší.
2. Karton má rozměry 60×28 cm. Chceme vytvořit krabici bez víka, tak že v rozích odstřihneme čtverec. Jakou velikost musí mít strana čtverce, aby krabice měla co největší objem?
3. *Pro pokročilé*:
   Na parabole $y = 4x - x^2$ najděte bod, který je nejblíže k bodu $A = [-1, 4]$.

Odpovědi.

1. 16, 16
2. 6
3. [1, 3]