Gaussova eliminační metoda

Gaussovou eliminační metodou lze jednoduše a rychle řešit systémy lineárních rovnic. V porovnání se sčítací, dosazovací nebo porovnávací metodou je její výhodou to, že je univerzální. Můžeme ji využít u systémů s libovolným počtem rovnic a neznámých, zatímco ostatní zmíněné metody jsou pro systémy s více než 3 rovnicemi komplikované.

Mějme systém rovnic ve všeobecném tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Nový pojem: Homogénní a nehomogénní systém

Jsou-li na pravé strane systému rovnic (za znamínkem =) samé nuly, nazývá se **homogenní**. V opačném případe jde o **nehomogenní systém**.

Tematický příklad. Systém vlevo je homogenní, vpravo nehomogenní.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + 3y &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + 4y &= 5 \\ 7x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

Postup

Nejprve je potřeba převést rovnice na maticový tvar $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tematický příklad. Pro soustavu se třemi rovnicemi to bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} 2y + z &= -8 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 3 \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nový pojem 1: Rozšířená matice systému

Matici

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme **rozšířenou maticí systému**.

Tematický příklad. Rozšířenou matici systému sestavíme následovně

$$\begin{aligned} 2y + z &= -8 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Základní myšlenkou Gaussovy eliminační metody je upravit rozšířenou matici systému $A|b$ tak, aby v každém dalším řádku bylo alespoň o jednu neznámou méně. Tento tvar nazýváme **trojúhelníkový tvar matice**. Můžeme použít jenom tzv. **ekvivalentní úpravy**, mezi které patří

- násobení či dělení jednotlivých řádků nenulovým číslem
- výměna řádků
- přičítání násobků jednotlivých řádků k jinému řádku.

Po upravě na trojúhelníkový tvar vyřešíme poslední řádek matice (= poslední rovnici) a její řešení zpětně dosadíme do předešlých rovnic. Tím získáme celkové řešení.

Tematický příklad. Upravme rozšířenou matici systému na trojúhelníkový tvar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Krok 1: Vyměňme první a druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Krok 2: Připočítejme první řádek ke třetímu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Krok 3: Vyměňme druhý a tretí řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

Krok 4: Dvojnásobek druhého řádku pripočítejme ke třetímu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Krok 5: Matice je nyní ve trojúhelníkovém tvaru. Z poslední rovnice lze lehce dopočítat proměnnou z.

$$-z = -2$$

$$z = 2$$

Krok 6: Zpětným dosazením do druhého řádku matice dopočítáme proměnnou y

$$-y - 2 = 3$$

$$y = -5$$

a dosazením do prvního řádku matice i poslední proměnnou x.

$$x - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0$$

$$x = -4$$

V tomto příkladě jsme Gaussovou eliminační metodou získali jedno řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. V obecném případě může být i nekonečně mnoho řešení nebo dokonce žádné.

Nekonečně mnoho řešení systému

Tematický příklad. Pomocí Gaussovy eliminační metody řešme systém rovnic

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y - 4z &= 6. \end{aligned}$$

Přepišme nejdříve rovnice na rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right).$$

Upravme ji na trojúhelníkový tvar. Odečtěme dvojnásobek prvního řádku od druhého a trojnásobek prvního řádku od třetího

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \end{array}\right).$$

Nyní odečtěme druhý řádek od třetího

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední řádek je nulový, ze systému nám vypadla poslední rovnice. Zůstaly nám tedy dvě rovnice a tři neznámé. Z druhého řádku matice si vyjádříme proměnnou y

$$\begin{aligned} -y + 5z &= -6 \\ y &= 6 + 5z. \end{aligned}$$

Dosazením do prvního řádku máme

$$\begin{aligned} x + (6 + 5z) - 3z &= 4 \\ x &= 2 - 2z. \end{aligned}$$

Proměnou z můžeme položit rovnu libovolnému reálnému číslu p, pak $x = 2 - 2p$ a $y = 6 + 5p$. Nedostali jsme jedno konkrétní řešení, ale nekonečne mnoho. Tato řešení budou záviset na **parametru** p. Dosazením libovolného čísla za parametr dostaneme konkrétní řešení. Třeba pro $p = 0$ je řešením $(x, y, z) = (2, 6, 0)$ a pro $p = -1$ je řešením $(x, y, z) = (4, 1, -1)$ atd.

Systém nemá řešení

Tematický příklad. Podívejme se na systém

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y - 4z &= 4 \\ -6x - 3y - 3z &= 2. \end{aligned}$$

Pokusme se pomocí Gaussovy eliminační metody nalézt jeho řešení. Nejprve ho převedeme do maticového tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ -6 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Pak pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici na trojúhelníkový tvar. První řádek vynásobíme třemi, druhý řádek dvěma a odečteme je.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -8 & 8 \\ -6 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -11 & 5 \\ -6 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Pak první řádek připočítáme také ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -11 & 5 \\ -6 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku by mělo platit $0 = 5$, což ovšem nelze. Proto tahle soustava nemá řešení.

Důležité tvrzení: Počet řešení

Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, tzv. **triviální** - jsou ním samé nuly. Nehomogenní soustava může mít jedno řešení, nekonečně mnoho nebo taky žádné řešení.