Jednovýběrový t-test

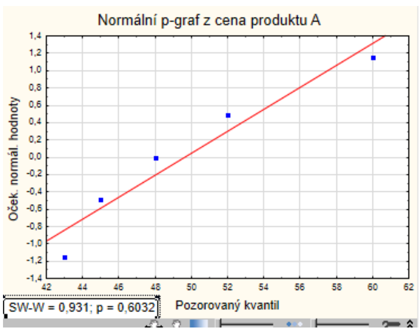
Motivace

Představme si, že si chceme založit vlastní obchod a v něm prodávat nějaký produkt (označme ho A). Chtěli bychom, aby se cena tohoto produktu pohybovala někde ve středu cen, za které se výrobek prodává, tedy abychom ho neprodávali pod cenou, ale zároveň aby cena nebyla tak vysoká, že ho již nikdo nekoupí. Rozhodli jsme se, že bychom náš výrobek chtěli prodávat za 50 Kč. Nyní bychom se chtěli ujistit, že naše cena splňuje výše uvedené podmínky. Rozhodli jsme se proto, náhodně vybrat několik obchodů a zjistit, ceny produktu A v těchto obchodech. Ceny byly postupně: 48 Kč, 60 Kč, 52 Kč, 45Kč, 43 Kč. Nyní bychom chtěli zjistit, zda střední hodnota ceny produktu A může být 50 Kč. K ověření tohoto tvrzení můžeme využít jednovýběrový t-test.

Nový pojem: Jednovýběrový t-test

Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení s parametry μ a σ^2, přičemž hodnotu ani jednoho z těchto parametrů neznáme. Předpokládejme, že $n \geq 2$ a c je konstanta. Test $H_0 : \mu = c$ proti $H_1 : \mu \neq c$ (resp. $H_1 : \mu < c$ nebo $H_1 : \mu > c$) se nazývá jednovýběrový t-test.
Realizace testové statistiky je $t_0 = \frac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.
Kritický obor pro $H_1 : \mu \neq c$ je $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right)$.
Kritický obor pro $H_1 : \mu < c$ je $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\rangle$.
Kritický obor pro $H_1 : \mu > c$ je $W = \langle t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.
Pokud $t_0 \in W$, pak zamítáme H_0 ve prospěch H_1.

Postup si vyzkoušíme na zadaném příkladu. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu = 50$ proti $H_1 : \mu \neq 50$.
Stanovíme si, na jaké hladině významnosti test provedeme, uvažujme $\alpha = 0,05$. Abychom mohli test použít musíme nejprve ověřit předpoklady testu, v našem případě je to předpoklad normality. Vzhledem k tomu, že máme malý rozsah souboru, použijeme NP-plot a Shapiro-wilkův test. Jak vidíme z obrázku p-hodnota Shapiro-wilkova testu 0,6032 >0,05, proto nezamítáme hypotézu, že data pochází z normálního rozložení a budeme tedy dále předpokládat, že tento předpoklad testu je splněn.



Nyní se již můžeme pustit do samotného testu. Nejprve vypočítáme realizaci testové statistiky, k tomu potřebujeme vypočítat výběrový průměr a rozptyl.

$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{48+60+52+45+43}{5} = 49,6,$

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1}m^2 = \frac{48^2+60^2+52^2+45^2+43^2}{5-1} - \frac{5}{4}49,6^2 = 45,3.$

Realizace testové statistiky tedy je $t_0 = \frac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{49,6-50}{\frac{\sqrt{45,3}}{\sqrt{5}}} = -0,132891.$

Dalším krokem je stanovit kritický obor $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = (-\infty, -t_{0,975}(4)\rangle \cup \langle t_{0,975}(4), \infty) = (-\infty, -2,776\rangle \cup \langle 2,776, \infty).$

Protože $-0,132891 \notin W$ nezamítáme nulovou hypotézu. Na základě našeho náhodného výběru nemáme důvod pochybovat o tom, že střední hodnota ceny produktu A je 50 kč na hladině významnosti 0,05.

Dále bychom se mohli zajímat o „interval, ve kterém se bude střední hodnota nacházet s předem danou pravděpodobností.“

Nový pojem: Intervaly spolehlivosti pro μ

Předpokládejme, že máme náhodný výběr $X_1, \cdots, X_n$ z normálního rozložení se střední hodnotou μ, označme m realizaci výběrového průměru a s realizaci výběrové směrodatné odchylky. Pak realizace

- oboustranného intervalu spolehlivosti je:
  $(d,h) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$
- levostranného intervalu spolehlivosti je:
  $(d,\infty) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
- pravostranného intervalu spolehlivosti je:
  $(-\infty,h) = \left(-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)\right).$

V našem případě $(d,h) = \left(49,6 - \frac{\sqrt{45,3}}{\sqrt{5}}t_{0,975}(5-1), 49,6 + \frac{\sqrt{45,3}}{\sqrt{5}}t_{0,975}(5-1)\right) = (41,243; 57,957).$ Tedy můžeme zjednodušeně říct, že střední hodnota se nachází na intervalu $(41,243; 57,957)$ s pravděpodobností 95%.