Přibližné vyjádření funkce

Diferenciál

Diferenciálem rozumíme přírůstek funkce na tečně. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v okolí bodu x_0 aproximovatelná tečnou a k přibližnému určení funkční hodnoty v bodě "blízkému"bodu x_0 nám stačí určit funkční hodnotu na tečně.

Na Obrázku 1 je geometrický význam diferenciálu. Je evidentní, že funkce $f(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0. Funkční hodnotu v bodě $x_0 + h$ vyjádříme:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f(x_0).$$

Přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ můžeme vyjádřit jako součet:

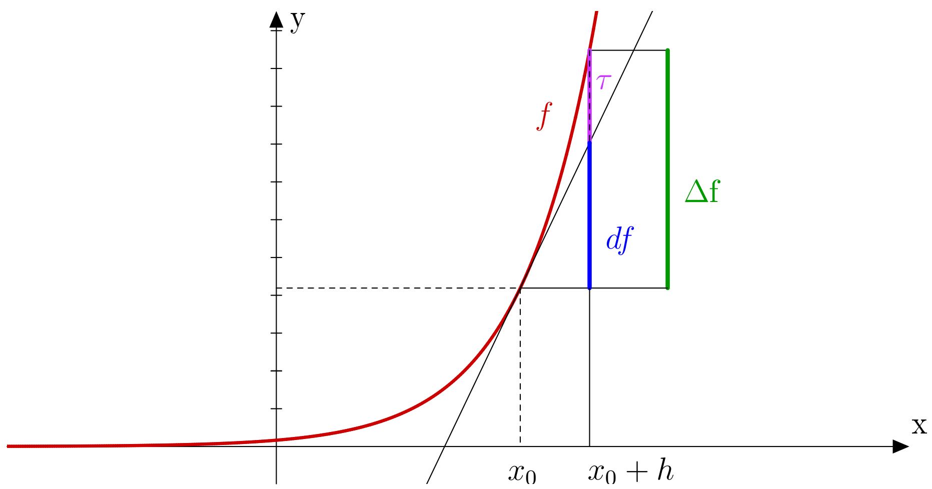
$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \tau(h),$$

kde právě $df(x_0)$ je **diferenciál funkce** $f(x_0)$ v bodě x_0 (je tak zvaně přírůstek na tečně) a $\tau(h)$ je chyba.

Nový pojem: Diferenciál

Potom diferenciál můžeme vyjádřit jako

$$df(x_0) = f'(x_0)h.$$



Obr. 1: Geometrický význam diferenciálu

Jeli h dostatečně malé ($x_0 + h$ je libovolně blízko x_0), pak chyba $\tau(h)$ je mnohem menší než diferenciál. Chybu $\tau(h)$ zanedbáváme a funkční hodnotu v bodě $x_0 + h$ přibližně určíme

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Postup popsaný výše názorněji přiblíží následující příklad.

Příklad. Porovnejte $\Delta f(x_0)(h)$ (přírůstek funkce) a $df(x_0)(h)$ (diferenciál funkce) funkce $f(x) = x^3 + 2x$, je-li $x_0 = 1$ a $h = 0,01$, tj. zjistěte velikost chyby τ.

Řešení. Nejprve zjistíme skutečný přírůstek na funkci

$$f(1) = 1^3 + 2 = 3 \qquad f(1 + 0.01) = (1,01)^3 + 2 \cdot 1,01 = 3,050301.$$

Tedy

$$\Delta f(1 + 0,01) = 0,050301.$$

Nyní vypočítáme přírůstek na tečně funkce v daném bodě při dané diferenci h, tj. diferenciál:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot (h) = (3x^2) \cdot (h) = (3 + 2) \cdot 0,01 = 0,05.$$

Pak platí $\tau(h) = \Delta f(1 + 0,01) - df(x_0) = 0,050301 - 0,05 = 0,000301.$

Příklad. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

a)	$\cos 47°$	b)	$\sqrt[3]{7,97}$
c)	$\mathrm{e}^{1,02}$	d)	$0,95^3$

Řešení.

a) $\cos 47° = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right)$, neboť $45°$ má v obloukové míře hodnotu $\frac{\pi}{4}$, $2°$ hodnotu $\frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$. Zvolíme tedy $x_0 = \frac{\pi}{4}, h = \frac{\pi}{90}$. Potom

$$dy = (-\sin x_0) \cdot h = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{180} \quad \text{a} \quad \cos 47° \doteq \cos(x_0) + dy = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{180}.$$

b) Volíme $x_0 = 8, h = -0,03$, tedy $dy = \left(\sqrt[3]{x_0}\right)' \cdot h = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} \cdot (-0,03) = -0,0025$. Pak

$$\sqrt[3]{7,97} \doteq \sqrt[2]{8} - 0,0025 = 1,9975.$$

c) Volíme $x_0 = 1, h = 0,02, dy = \mathrm{e}^{x_0} \cdot h = 0,02\mathrm{e}$. Pak

$$\mathrm{e}^{1,02} \doteq \mathrm{e} + 0,02\mathrm{e} = 1,02\mathrm{e}.$$

d) Volíme $x_0 = 1, h = -0,05, dy = (x_0^3)' \cdot h = 3x_0^2 \cdot h = 3 \cdot (-0,05)$. Pak

$$0,95^3 \doteq 1^3 - 0,15 = 0,85.$$

Taylorův polynom

V předchozí sekci jsme si vysvětlili, co je to diferenciál. Víme, že je to přírůstek funkční hodnoty na tečně. Ovšem když se více vzdálíme bodu x_0, chyba rychle roste. To je však zřejmé, protože funkce se "vlní"a přímka nikoliv. Přesnější výsledky získáme, když budeme aproximovat původní funkci pomocí funkce, která se také "kroutí". Po přímce nejjednodušší funkcí je kvadratický polynom, jestliže však chceme být co možná nejpřesnější, musíme aproximovat polynomiální funkcí stupně n.

Nový pojem: Taylorův polynom

Má-li funkce $f(x)$ derivace až do řádu n, pak tuto funkci můžeme funkci v okolí bodu x_0 aproximovat polynomem stupně n. Tento polynom nazýváme **Taylorův polynom**, který má tvar

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Příklad. Aproximujte funkci $y = \sin x$ polynomem stupně $n = 5$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Nejprve najdeme prvních pět derivací funkce $y = \sin x$:

$$f'(x) = \cos(x) \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f^3(x) = -\cos x \qquad f^4(x) = \sin x \qquad f^5(x) = \cos x$$

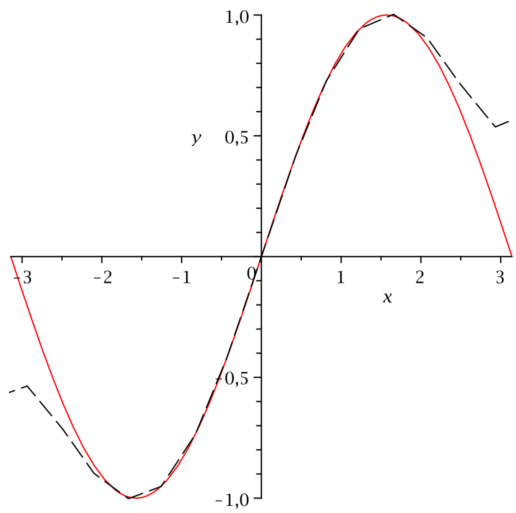
Vypočítáme funkční hodnoty jednotlivých derivací pro $x_0 = 0$:

$$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^3(0) = -1 \qquad f^4(0) = 0 \qquad f^5(0) = 1.$$

Následně dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned} T_5(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 - \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5. \end{aligned}$$

Pro úplnou představu si prohlédneme Obrázek 2. Graf funkce a aproximace Taylorovým polynomem. Na obrázku je červenou barvou znázorněna funkce $y = \sin x$. Tuto funkci jsme nahradili Taylorovým polynomem $T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, který je znázorněn přerušovanou černou křivkou. Vidíme, že Taylorův polynom téměř dokonale kopíruje funkci v okolí bodu x_0, pro něž jsme funkci $y = \sin x$ aproximovali Taylorovým polynomem. Pokud bychom chtěli, aby polynom kopíroval funkci a větším intervalu, museli bychom zvýšit stupeň polynomu.



Obrázek 2. Graf funkce a aproximace Taylorovým polynomem

Příklad. Rozviňte polynom $4x^3 - x^2 + 3x + 5$ do mocnin $x + 3$.

Řešení. Máme vlastně nahradit zadaný polynom polynomem jiným, a to Taylorovým polynomem se středem v bodě $x_0 = -3$. Vypočítáme derivace a určíme funkční hodnoty

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 2x + 3 \qquad f''(x) = 24x - 2 \qquad f^3(x) = 24 \qquad f^4(x) = 0, \\ f'(-3) &= 117 \qquad f''(-3) = -74 \qquad f^3(-3) = -12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^3 - x^2 + 3x + 5 &\doteq -121 + 117(x+3) - \frac{74}{2}(x+3)^2 - \frac{12}{6}(x+3)^3 \\ &\doteq -112 + 117(x+3) - 37(x+3)^2 - 2(x+3)^3. \end{aligned}$$

Příklad. Nahraďte funkci $\ln \frac{1-x}{x+1}$ Taylorovým polynomem stupně 5 v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Určíme derivace a funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{-1-x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{4x}{(-1-x^2)^2}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(-1-x^2)^3},$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{48x(1+x^2)}{(-1-x^2)^4}, f^{(5)}(x) = \frac{48(1+5x^4+10x^2)}{(-1-x^2)^5}$$
$$f'(0) = -2 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -4 \qquad f^{(4)}(0) = 0 \qquad f^{(5)}(0) = -48.$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{1-x}{x+1} &\doteq 0 - 2x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 - \frac{48}{5!}x^5 \\ &\doteq -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right). \end{aligned}$$

Příklad. Pomocí Taylorova polynomu stupně 8 určete přibližnou hodnotu $\sin 5°$.

Řešení. Určíme derivace funkce $y = \sin x$ až do řádu 8

$$\begin{aligned} &f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f^{(3)}(x) = -\cos x, \qquad f^{(4)}(x) = \sin x, \\ &f^{(5)}(x) = \cos x, \qquad f^{(6)}(x) = -\sin x, \qquad f^{(7)}(x) = -\cos x, \qquad f^{(8)}(x) = \sin x \end{aligned}$$

Vypočítáme funkční hodnoty všech derivací v bodě $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} &f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 0 \\ &f^{(5)}(0) = 1, \qquad f^{(6)}(0) = 0, \qquad f^{(7)}(0) = -1, \qquad f^{(8)}(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5° = \sin \frac{\pi}{36} &\doteq x - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^7 \\ &\doteq 0{,}08715574277. \end{aligned}$$