MATH AND STATS SUPPORT CENTRE

Derivace funkcí více proměnných

Derivace je základním pojmem diferenciálního počtu. Při definici derivace pro funkce více proměnných můžeme postupovat dvěma způsoby. První možnost je uvažovat hodnoty dané funkce pouze na jisté přímce. Získáme tak v podstatě funkci jedné proměnné. Abychom získali úplnější informaci o hodnotách funkce v okolí daného bodu musíme definovat silnější pojem – diferenciál.

Obsah

1. Úvod 1
2. Směrové a parciální derivace 2
3. Diferenciál funkce 5

Úvod

Ve vědních i technických oborech se často setkáváme s veličinami, jejichž hodnoty závisí na větším počtu proměnných. Objem válce je závislý na poloměru podstavy a výšce, tlak plynu na teplotě a objemu, zisk ekonomického subjektu na nákladech a ceně, napětí v elektrickém obvodu na hodnotách odporů, kapacit a indukčností jeho prvků, apod. Matematický aparát pro popis takovýchto závislostí v systémech s "konečně mnoha stupni volnosti" poskytuje teorie funkcí více proměnných.

Nový pojem

Funkce n proměnných — funkce $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, která zobrazuje bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ do bodu $y \in \mathbb{R}$. Značíme $y = f(x_1, \dots, x_n)$. *Definiční obor* funkce n proměnných — množina $A \subset \mathbb{R}^n$ bodů, pro které má definiční předpis funkce smysl.

Nový pojem

Funkce dvou proměnných — funkce $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Značíme $z = f(x, y)$. Definičním oborem takové funkce je část roviny. Grafem je zpravidla plocha.

Příkladem funkce více proměnných mohou být například známé matematické (či fyzikální) vzorce. Objem rotačního válce V je funkcí svého poloměru r a výšky v, což zapíšeme jako

$$V = V(r, v) = \pi r^2 v.$$

Analogicky objem komolého rotačního kužele V je funkcí tří proměnných — poloměrů r a R jeho spodní a horní podstavy a výšky tělesa v, což zapíšeme jako

$$V = V(r, R, v) = \frac{\pi v}{3}(r^2 + rR + R^2).$$

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a předpisem, kterým je každému bodu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$ přiřazena funkční hodnota $f(x)$. Pokud je předpis dán vzorcem a definiční obor funkce není zadán, pak definičním oborem rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl.

Směrové a parciální derivace

Podobně jako derivace byla jedním ze základních prostředků pro vyšetřování funkcí jedné reálné proměnné, budou parciální derivace jedním ze základních prostředků pro vyšetřování funkcí více proměnných.

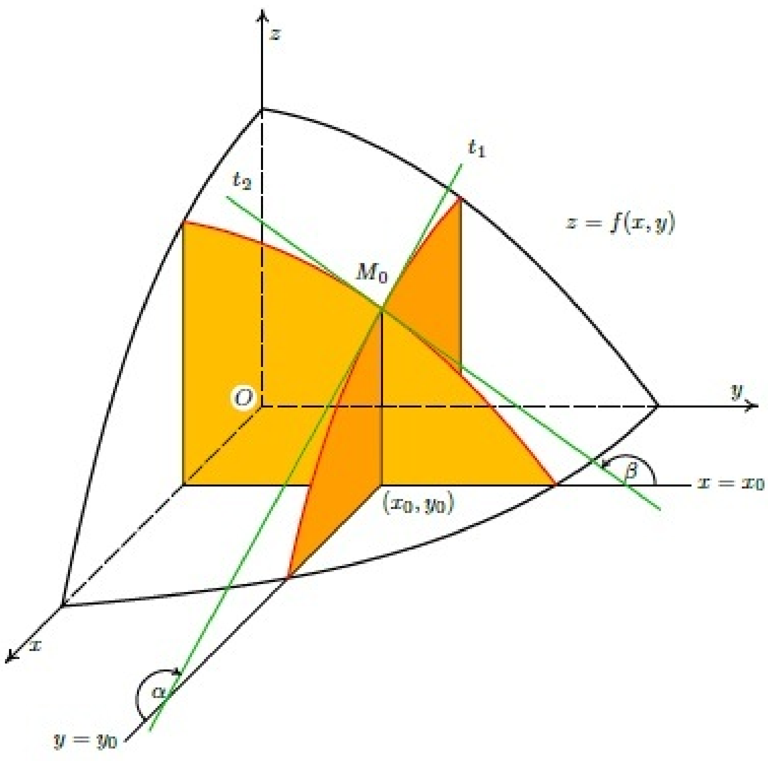
Nový pojem

Parciální derivace funkce n proměnných podle x_i — je derivace funkce jedné proměnné $g(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo také f'_{x_i}.

Interpretační poznámka. Při počítání parciálních derivací f'_{x_i} považujeme za proměnnou pouze x_i, na ostatní proměnné se díváme jako na konstanty. Pro výpočet parciálních derivací platí pravidla o derivování součtu, součinu a podílu funkcí.

Užitečná poznámka. Uvědomme si, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ funkce f podle x_i v bodě $x = (x_1, \dots, x_n)$ je číslo, které závisí na volbě bodu x. Tedy parciální derivace funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle x_i je též funkcí n proměnných.

Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace v bodě se omezíme pouze na funkci dvou proměnných a bod (x_0, y_0). V tomto případě "zafixování"proměnné y, resp. x znamená omezit se při výpočtu $f'_x(x_0, y_0)$, resp. $f'_y(x_0, y_0)$ na rovinu $y = y_0$, resp. $x = x_0$. Ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je pak derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě (x_0, y_0) k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $y = y_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 1. Geometrický význam parciálních derivací f'_x a f'_y v bodě (x_0, y_0).

Tématický příklad. Najděte parciální derivaci funkce $z = \frac{y}{x+y}$. Nejdříve spočítáme $\frac{\partial z}{\partial x}$. Při počítání považujeme y za konstantu a derivujeme z jako funkci jedné proměnné x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot y}{(x+y)^2} = -\frac{y}{(x+y)^2}.$$

Podobně při počítání $\frac{\partial z}{\partial y}$ považujeme x za konstantu a derivujeme z jako funkci jedné proměnné y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Cvičení 1

Najděte parciální derivace funkce z podle jednotlivých proměnných

(a) $z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 7$ (b) $z = x^2 \cos(x + 3y)$
(c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ (d) $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$

Parciální derivace můžeme též zavést přímo pomocí limity. Víme, že pro funkci $y = g(x)$ jedné proměnné je

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Nový pojem

Derivací funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *ve směru* vektoru $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(t) = f(a_1 + hs_1, \ldots, a_n + hs_n)$$

v bodě $h = 0$ a zapisujeme ji $f'_{\vec{s}}(a)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hs_1, \ldots, a_n + hs_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Volíme-li vektor $\vec{s} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ tvořený nulami s výjimkou i-té pozice (kde je 1), derivace funkce $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve směru $\vec{s} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je rovna parciální derivaci $f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$.

Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem gradientu funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Nový pojem

Gradient funkce f v bodě A — vektor parciálních derivací podle jednotlivých proměnných, tj. $grad\, f(A) = (f'_{x_1}(A), \dots, f'_{x_n}(A))$. Značíme také $\nabla f(A)$. Je to směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

Tématický příklad. Najděte gradient funkce $f = x^3 + y^3 - 3xy$, v bodě $A = [2, 1]$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A = 3x^2 - 3y|_A = 9,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = 3y^2 - 3x|_A = -3.$$

Z toho gradient funkce v bodě A je vektor $grad\, f(A) = (9, -3)$.

Cvičení 2

Najděte gradient funkce f v bodě A

(a) $f(x, y, z) = xe^{z+2y}$, $A = [1, -1, 2]$

(b) $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A = [1, 2, 2]$

(c) $f(x, y, z) = xyz$, $A = [1, 2, 3]$

Nový pojem

Parciální derivace druhého řádu — $f''_{x_i x_j}(x_1, \dots, x_n) = (f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n))'_{x_j}$. Je to parciální derivace funkce $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, podle proměnné x_j. Značíme také $\frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

Užitečná poznámka. Můžeme počítat i parciální derivace vyšších řádů. Parciální derivace n -tého řádu je parciální derivace funkce, která sama vznikla jako $(n-1)$-ní derivace. Při počítání parciálních derivací vyšších řádů nezáleží na pořadí, v jakém počítáme derivace podle jednotlivých proměnných, jsou-li tyto derivace spojité.

Tématický příklad. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = xe^y$ podle jednotlivých proměnných.

Nejdříve spočítáme parciální derivace prvního řádu dané funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y.$$

Potom

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = xe^y, \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = e^y.$$

Cvičení 3

Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f podle jenotlivých proměnných

(a) $f(x,y) = x + y + \frac{xy}{x-y}$

(b) $f(x,y) = xy + \cos(x-y)$

(c) $f(x,y,z) = xyz - 3x + 7y + 5z$

(d) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{yz^2}{x}\right)$

Diferenciál funkce

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x_0 souvisí s nahrazením funkce tečnou v bodě x_0 a jeho existence je rovnocenná existenci derivace v tomto bodě. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když z formálního hlediska je význam diferenciálu totožný.

Nový pojem

Řekneme, že funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ definována v nějakém okolí bodu $a = [a_1,\dots,a_n]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují konstanty $D_1,\dots,D_n \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{[h_1,\dots,h_n]\to[0,\dots,0]} \frac{f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) - (D_1h_1+\dots+D_nh_n)}{\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}} = 0$$

Lineární výraz $D_1h_1+\dots+D_nh_n$ proměnných $h_1+\dots+h_n$ se nazývá *diferenciál nebo též totální diferenciál* funkce f v bodě $[a_1,\dots,a_n]$ a značí se $df(a_1,\dots,a_n)$.

Důležité tvrzení

Je-li funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ diferencovatelná v bodě $a = [a_1,\dots,a_n]$, resp. v jeho okolí, pak je v tomto bodě, resp. v jeho okolí spojitá. Navíc v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a splňují rovnosti

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = (D_1,\dots,D_n).$$

Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ pro $i = 1,\dots,n$ *parciální diferenciály*. Přírůstky h_i lze značit jako dx_i.

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

Vyjádříme-li přírůstky $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$ a dosadíme do výše uvedené rovnice, vznikne nám pro proměnné x, y, z lineární rovnice

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

která je vzorcem *tečné roviny* k funkci $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0,z_0]$, kde $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Tématický příklad. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě T = [2, -1, ?].

Nejdříve spočítáme třetí souřadnici bodu T. Bod leží na ploše, a proto $z_0 = f(2,-1) = 1$. Dále
$$\frac{\partial z}{\partial x} = x,\ \frac{\partial z}{\partial x}(T) = 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial z}{\partial y}(T) = 2.$$
Rovnice tečné roviny ρ k ploše $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě $T = [2,-1,1]$:
$$\rho : 2(x-2) + 2(y+1) - (z-1) = 0.$$
Po úpravě dostaneme rovnici tečné roviny ρ: $2x + 2y - z - 1 = 0$.

Tématický příklad. Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě T = [1,2,-1].

Plocha je daná implicitně. Bod T leží na dané ploše, protože souřadnice tohoto bodu splňují rovnici plochy: $1+8-1-2-6 = 0$. Spočítáme parciální derivace funkce $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$:
$$F'x = 3x^2 + yz,\ F'y = 3y^2 + xz,\ F'z = 3z^2 + xy;\ F'_x(T) = 1,\ F'_y(T) = 11,\ F'_z(T) = 5.$$
Potom
$$\rho : 1(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0.$$
Po úpravě dostaneme rovnici tečné roviny ρ: $x + 11y + 5z - 18 = 0$.

Cvičení 4

Napište rovnici tečné roviny k následujícím plochám v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$:

(a) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}, \qquad T = [3,4,?]$

(b) $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4z^3x + 1 = 0, \qquad T = [?,1,1]$

(c) $z = 2x^2 - 4y^2, \qquad T = [2,1,?]$

Odpovědi na cvičení

Cvičení 1

a) $z'_x = 2x - 3y + 4,\ z'_y = 2y - 3x + 5;$

b) $z'_x = 2x\cos(x+3y) - x^2 sin(x+3y),\ z'_y = -3x^2\sin(x+3y);$

c) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}};$

d) $z'_x = \frac{-y}{x^2+y^2},\ z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$

Cvičení 2

a) $\nabla f(A) = (1,2,1)$; b) $\nabla f(A) = \frac{1}{81}(7,-4,-4)$; c)$\nabla f(A) = (6,3,2)$.

Cvičení 3

a) $f''_{xx} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$, $f''_{xy} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$;

b) $f''_{xx} = -\cos(x-y)$, $f''_{xy} = 1 + \cos(x-y)$, $f''_{yy} = -\cos(x-y)$;

c) $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{zz} = 0$, $f''_{xy} = z$, $f''_{xz} = y$, $f''_{yz} = x$;

d) $f''_{xx} = \frac{1}{x^2}$, $f''_{yy} = -\frac{1}{y^2}0$, $f''_{zz} = -\frac{2}{z^2}$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yz} = 0$.

Cvičení 4

a) $T = [3, 4, -7]$ a ρ: $17x + 11y + 5z - 60 = 0$;

b) $3x^4 - 4 + 4x - 4x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^4 = 3 \Rightarrow x = 1$ anebo $x = -1 \Rightarrow T_1 = [1, 1, 1]$ a ρ_1: $3x - 2y - 2z + 1 = 0$ a také $T_2 = [-1, 1, 1]$ a ρ_2: $3x + 4y - 1 = 0$;

c) $T = [2, 1, 4]$ a ρ: $8x - 8y - z - 4 = 0$.