Nevlastní integrál

Dosud jsme se zabývali Riemannovým integrálem, který je definován pro ohraničenou funkci $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tento určitý integrál jsme zapisovali ve tvaru $\int\limits_a^b f(x)dx$. V tomto článku poněkud rozšíříme pojem Riemannova určitého integrálu i na případy, kdy je integrační obor neohraničený (tj. $(-\infty, b\rangle$, $\langle a, \infty)$ nebo případně $(-\infty, \infty)$) nebo je neohraničená integrovaná funkce. Tyto zobecněné určité integrály se nazývají nevlastní. Seznámíme se se dvěma typy nevlastních integrálů.

Obsah

1. Úvod 1
2. Nevlastní integrál vzhledem k intervalu 2
3. Nevlastní integrál vzhledem k funkci 3

Úvod

V případě Riemannova určitého integrálu $\int\limits_a^b f(x)dx$ jsme vycházeli ze dvou předpokladů:

1 Integrační obor je konečný uzavřený interval $\langle a, b\rangle$.

2 Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená (ohraničená zdola i shora).

Integrály definované za těchto předpokladů nazýváme *vlastní integrály*. Jestliže se v určitém integrálu objeví neohraničený interval nebo neohraničená funkce, hovoříme o *nevlastních integrálech*. Rozeznáváme dva druhy nevlastních integrálů:

1 Je-li interval, na kterém integrujeme, neohraničený, hovoříme o nevlastním integrálu vlivem meze (prvního druhu, nevlastní integrál na neohraničeném intervalu). Jde o integrály typu

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

2 Je-li integrovaná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ neohraničená, hovoříme o nevlastních integrálech vlivem funkce (druhého druhu).

Nevlastní integrál vlivem meze

Nový pojem

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle a, \infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, říkáme, že integrál $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *konverguje*. Pak pokládáme

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Pokud limita $\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že *integrál diverguje.*

Interpretační poznámka. Je-li singularita v dolní mezi, je definice analogická a platí

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Důležité tvrzení

Pokud jsou singulární body v horní i v dolní mezi, pak interval rozdělíme bodem c a píšeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx.$$

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

Budeme postupovat podle definice. Nejprve nalezneme pomocnou funkci horní meze $F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$ a potom spočítáme její limitu $L = \lim_{c\to+\infty} F(c)$.

$F(c) = \int\limits_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^c = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c$, takže

$L = \lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$.

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$.

Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladu.

$F(c) = \int\limits_0^c \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^c \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^c = \frac{1}{2}\ln(1+c^2)$, takže

$L = \lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+c^2) = +\infty$.

Integrál tedy diverguje.

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2e^{x^3}dx$.

Funkce $f(x) = x^2e^{x^3}$ je spojitá pro všechna reálná x. Nalezněme nejprve primitivní funkci k dané funkci:

$$\int x^2e^{x^3}dx = \left| \begin{array}{c} substituce: \\ x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

$G(c) = \int\limits_{c}^{0} x^2e^{x^3}dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_c^0 = \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right)$, takže

$L = \lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty} \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{c\to-\infty} e^{c^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0 = \frac{1}{3}$.

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}$.

Cvičení 1

Vypočtěte integrály

(a) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$ (b) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (c) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ (d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

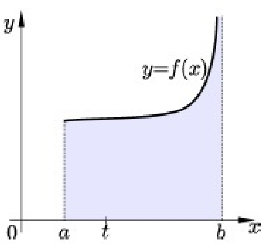
Nevlastní integrál vlivem funkce

Nový pojem

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, t\rangle$ kde $a < t < b$ a nechť je $f(x)$ neohraničená v levém okolí bodu b (viz Obrázek 1). Existuje-li vlastní limita $\lim_{t\to b^-} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ *konverguje*. Pak pokládáme

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Pokud limita $\lim_{t\to b^-} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že *integrál diverguje*.



Obrázek 1. Funkce neohraničená v levém okolí bodu b.

Nový pojem

Bodu b, pro který platí, že v jeho levém okolí je funkce $f(x)$ neohraničená a $\int\limits_a^b f(x)dx$ konverguje říkáme *singulární bod.*

Interpretační poznámka. Je-li singulárním bodem bod a (tj. $f(x)$ je neohraničená v pravém okolí bodu a a $\int\limits_a^b f(x)dx$ konverguje), je definice analogická a píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx.$$

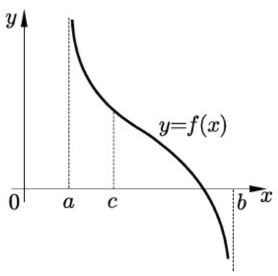
Důležité tvrzení

Pokud jsou oba krajní body intervalu $\langle a, b\rangle$ singulární a funkce $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, pak rozdělíme interval libovolným bodem c (viz Obrázek 2) a spočteme

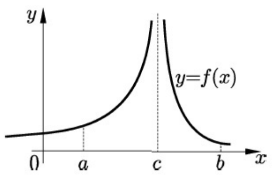
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)dx.$$

Pokud se singularita vyskytne uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$, pak integrál rozdělíme právě v tomto bodě c (viz Obrázek 3) a spočítáme

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx.$$



Obrázek 2. Funkce se singularitami v obou krajních bodech.



Obrázek 3. Funkce se singularitou uvnitř.

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $\langle 0,1)$ a v bodě $x=1$ není definována. Protože platí $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál z neohraničené funkce.

Nejprve nalezneme pomocnou funkci $F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$, $0 \le c < 1$ a potom spočítáme její limitu zleva $L = \lim_{c\to 1^-} F(c)$.

$$F(c) = \int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} \textit{substituce}: \\ 1-x^2=t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \\ 0 \mapsto 1,\ c \mapsto 1-c^2 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_1^{1-c^2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^{1-c^2} = [\sqrt{t}]_{1-c^2}^1 = 1 - \sqrt{1-c^2}.$$

Vypočteme limitu pro $c \to 1^-$:

$L = \lim_{c\to 1^-} F(c) = \lim_{c\to 1^-}(1-\sqrt{1-c^2}) = 1 - 0 = 1.$

Integrál je tedy konvergentní a platí: $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$.

Tématický příklad. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^4 \frac{1}{x}dx$.

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0,4\rangle$ a v bodě $x=0$ není definována. Protože platí $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál z neohraničené funkce. Grafem funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x=0$ a $y=0$.

Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $(c,4\rangle$, kde $0 < c \le 4$:

$G(c) = \int\limits_c^4 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_c^4 = \ln 4 - \ln c.$

Nyní vypočteme limitu pro $c \to 0^+$:

$L = \lim_{c\to 0^+} G(c) = \lim_{c\to 0^+}(\ln 4 - \ln c) = \ln 4 - (-\infty) = +\infty.$

Integrál je tedy divergentní.

Cvičení 2

Vypočtěte integrály

(a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ (b) $\int\limits_0^1 \ln x dx$ (c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x \cos x}$ (d) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

Odpovědi na cvičení

Cvičení 1

(a) diverguje; (b) $\frac{3\pi}{8}$; (c) diverguje; (d) 0.

Cvičení 2

(a) $\frac{5}{2}$; (b) -1; (c) diverguje; (d) diverguje.