Extrémy funkce více proměnných

V téhle kapitole si rozšíříme pojem extrému funkce. Už víme, co je to extrém funkce jedné proměnné a nyní si pojem zavedeme i pro funkci více proměnných.

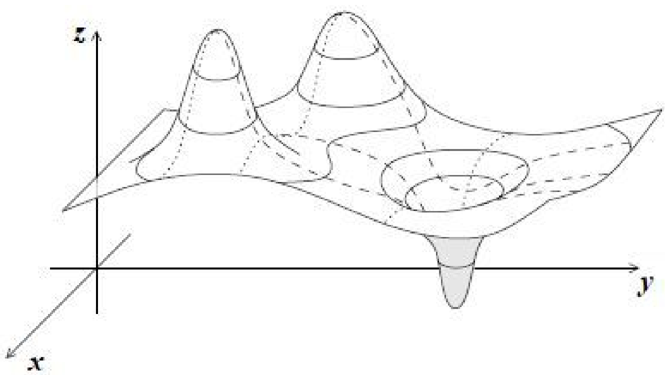
Nový pojem: Stacionární bod

Bod $\vec{a}$ je **stacionární** jsou-li všechny parciální derivace v tomhle bodě rovné nule. Tedy pokud je splneno $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$, nebo skrácene pokud tzv. **gradient** $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Jak už víme z části o funkci jedné proměnné, ne každý stacionární bod je extrémem funkce. Proto hovoříme, že jde pouze o nutnou podmínku k existenci extrému, ne postačující. Tato podmínka nám dává jenom "kandidáty" na lokální extrémy, zda-li nimi opravdu jsou je třeba ještě prověřit pomocí derivací vyšších řádů.

Lokální extrémy

Funkce f má v bode $\vec{a}$ **lokální minimum**, jestli je hodnota funkce v tomhle bodě nejmenší z hodnot v okolí bodu $\vec{a}$. Jinak řečeno, funkční hodnoty v okolí bodu $\vec{a}$ jsou vyšší.
O **lokální maximum** se jedná v případě, že funkční hodnota v daném bodě $\vec{a}$ je nejvyšší z hodnot v okolí tohoto bodu.
Funkce na obrázku má v levé části dvě lokální maxima a vpravo lokální minimum.



Postup při hledání extrémů funkce dvou proměných

1. Najdeme stacionární body funkce a to tak, že řešíme systém rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. Pak pomocí druhých derivací sestavíme Hessovou matici pro každý stacionární bod (x,y)

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Jestli je determinant Hessovy matice kladný, tj. $|H| > 0$ je v daném bodě extrém. Pak o určení druhu extrému rozhoduje druha derivace, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$ je to lokální minimum, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$ lokální maximum. V případe, že je determinant záporný, nejedná se o extrém, ale o sedlový bod.

Tematický příklad. Zjistěte zda-li má funkce $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$ lokální extrémy a jaký je jejich charakter.

Nejdříve vyhledáme stacionární body funkce a to z rovnic

$$\begin{aligned} 4x + 2y - 6 &= 0 \\ 2x + 4y &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je bod $(2, -1)$. Sestavíme Hessovou matici:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Její determinant $D = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 > 0$ a taky $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4 > 0$. Proto můžeme prohlásit, že bod $(2, -1)$ je lokálním minimem.

Důležité tvrzení: Postup při hledání lokálních extrémů

Nejdříve najdeme stacionární body funkce řešením systému rovnic. Pak sestavíme Hessovou matici a zjistíme znaménko determinantu. Je-li záporný, bod není extrémem funkce. Je-li determinant kladný, je v daném bodě extrém, a to lokální maximum pokud $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$ a nebo lokální minimum pokud $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$.

Vázané extrémy

V praxi se často setkáváme s úlohou najít extrémy funkce ne na celém jejím definičním oboru, ale pouze v nějaké části. Například na nějaké křivce zadané rovnicí $g(x, y) = 0$. Tuhle rovnici nazýváme vazba.

Postup při hledání vázaných extrémů funkce dvou proměných - metoda Lagrangeových multiplikátorů

1. Na výpočet se používá **Lagrangeova funkce** ve tvaru $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kde $g(x, y)$ vyjadřuje vazbu. Dále je postup stejný jako při hledání lokálních extrémů.

2. Naleznou se stacionární body pomocí rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0.$$

3. Sestaví se Hessova matice a určí znamínko determinantu.

Tematický příklad. Nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 - 2xy$, jestli je podmínka vazby $g(x,y) = x + y - 5$.

Sestavíme Lagrangeovou funkci $L(x,y,\lambda) = 3x^2 + 5y^2 - 2xy + \lambda \cdot (x + y - 5)$ a vyšetříme stacionární body:

$$\begin{aligned} 6x - 2y + \lambda &= 0 \\ 10y - 2x + \lambda &= 0 \\ x + y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením systému je $x = 3, y = 2, \lambda = -14$. Sestavíme Hessovou matici druhých derivací

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Její determinant je $D = 6 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2) = 56 > 0$ a taky $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) > 0$, proto bod $(3,2)$ je vázaným lokálním minimem.

Důležité tvrzení: Hledání vázaných extrémů

Pro nalezení vázaného extrému s vazbou $g(x,y) = 0$ používáme Lagrangeovou funkci ve tvaru $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$. Dále postupujeme jako v případě hledání lokálního extrému.

Globální extrémy

Funkce má v bodě $\vec{a}$ globální minimum, jestli je hodnota v tomhle bodě nejmenší ze všech hodnot, které funkce nabývá na zadané množině M. Podobně řekneme, že funkce má v bodě $\vec{a}$ globální maximum, jestli je funkční hodnota v tomhle bodě ze všech nejvyšší.

Postup při hledání globálních extrémů: Nejdříve vyhledáme lokální extrémy, podle postupu popsaného výše, které leží uvnitř zadané množiny M. Pak ještě prověříme vázané extrémy na hranici množiny M. Nakonec určíme které z nalezených maxim je největší (tedy globální) a které minimum je nejmenší (globální minimum).

Tematický příklad. Najdete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 3$ na kruhu M se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $2\sqrt{2}$.

Zaprvé nalezneme volné extrémy na množine M. K tomu potřebujeme určit stacionární body:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $(-1,1)$. Determinant Hessovy matice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je $D = 4 > 0$ a také $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 2 > 0$, proto bod $(-1,1)$ je lokálním minimem. Rovnice kruhu ze zadání je $x^2 + y^2 = 8$, bod $(-1,1)$ leží uvnitř a připadá v úvahu jako možný globální extrém na M.

Zadruhé je třeba prověřit vázané extrémy na M. Sestavíme Lagrangeovou funkci

$$L = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 3 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 8).$$

Parciálním derivovaním podle všech proměnných sestavíme systém

$$\begin{aligned} 2x + 2 + 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 2 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8 &= 0, \end{aligned}$$

který má dvě řešení $x_1 = -2, y_1 = 2, \lambda_1 = -1/2$ a $x_2 = 2, y_2 = -2, \lambda_2 = -3/2$. Čili máme dva stacionární body $(-2,2)$ a $(2,-2)$. Sestavíme Hessovou matici

$$H = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda = -1/2$ je její determinant kladný a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,2) = 1 > 0$, bod $(-2,2)$ je lokálním minimem. Pro $\lambda = -3/2$ je determinant také kladný, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) = -1 < 0$, bod $(2,-2)$ je lokálním maximem.
Na závěr stačí porovnat funkční hodnoty a vyhodnotit, které minimum je globální

$$\begin{aligned} f(-2,2) &= 3 \rightarrow \text{pouze lokální minimum} \\ f(-1,1) &= 1 \rightarrow \text{globální minimum.} \end{aligned}$$

Bod $(2,-2)$ je globálním maximem (není s čím srovnávat, protože jde o jediné maximum).