Integrovaní racionálně lomených funkcí

Někdy lze nalézt integrál racionálně lomené funkce pomocí přepsaní této funkce na součet jednodušších lomený racionální funkcí. V tomto článku budeme ilustrovat tuto myšlenku. Uvidíme, že je také potřeba umět jiné techniky, jako je doplnění na čtverec, integrování pomocí substitucí, použití standardních forem a tak dále.

Po přečtení tohoto textu, a/nebo shlédnutí instruktážního videa na toto téma, bychom měli být schopni:

- integrovat algebraické zlomky přepsané na parciální zlomky
- integrovat algebraické zlomky použitím různých jiných technik

Obsah

Úvod

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak můžeme integrovat některé algebraické zlomky. Budeme používat parciální zlomky pro přepsání integrandu jako součet jednodušších zlomků, které pak mohou být integrovány samostatně.

Příklady druhů algebraických zlomků, které budeme integrovat

$$\frac{x}{(2-x)(3+x)}, \qquad \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} \qquad \text{a} \qquad \frac{x^3}{x^2-4}$$

Zatímco na první pohled mohou vypadat podobně, jsou mezi nimi významné rozdíly. Například jmenovatel prvního zlomku obsahuje dva lineární výrazy. Druhý má neredukovatelný kvadratický výraz (tj. nelze rozložit). Třetí příklad obsahuje druhou mocninu lineárního výrazu. Čtvrtý příklad je nepravým zlomkem, protože stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele. Všechny tyto případy jsou důležité při výběru vhodného způsobu, jak postupovat.

Je také důležité vzít v úvahu *stupeň* čitatele a jmenovatele. Například, pokud vezmeme v úvahu třetí příklad, pak stupeň jmenovatele je 3, protože když vynásobíme $(x-1)^2(x+1)$ nejvyšší mocnina x je x^3. Stupeň čitatele je nulový, protože si můžeme představit 1 jako $1x^0$. Takže stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele, a to je případ prvních tří příkladů. Zlomkům, jako jsou tyto, říkáme *pravé zlomky*. Na druhé straně, v posledním příkladu stupeň čitatele je 3, zatímco stupeň jmenovatele je 2. Tento zlomek se nazývá *nepravý zlomek*.

Nový pojem

Stupeň polynomu je nejvyšší mocnina x, která se objevuje ve výrazu. Algebraické zlomky, kde stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele, se nazývají *ryze lomené výrazy*. V případě, že stupeň čitatele je větší nebo se rovná stupni jmenovatele, pak se zlomek označuje jako *neryzí*.

Některé předběžné výsledky

Abychom pochopili následující příklady, budeme muset použít různé techniky, o kterých bychom měli vědět z dřívějška. Stručně je zde shrneme, ale měli bychom se odkazovat i na jiné relevantní materiály, pokud je třeba si je zopakovat.

Parciální zlomky

Lineární vyraz $ax+b$ ve jmenovateli vede k parciálnímu zlomku ve tvaru $\frac{A}{ax+b}$.

Násobné lineární výrazy $(ax+b)^2$ vedou k parciálním zlomkům ve tvaru $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$.

Kvadratický vyraz ax^2+bx+c vede k parciálnímu zlomku ve tvaru $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Integrovaní - standardní výsledky

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \qquad \text{e.g.} \qquad \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln|x+1| + c\,,$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c\,.$$

Integrovaní - substituce

Najdeme $\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$, pomocí substituce $u = x-1$, $\mathrm{d}u = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$, což dává

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int u^{-2}\mathrm{d}u \\ &= -u^{-1} + c \\ &= -\frac{1}{x-1} + c\,.\end{aligned}$$

Integrace racionálně lomené funkce se dvěma lineárními výrazy

V této části se budeme zabývat tím, jak integrovat algebraické zlomky, které mají podobu pravého zlomku se dvěma lineárními výrazy ve jmenovateli.

Tématický příklad. Předpokládejme, že chceme najít

$$\int \frac{x}{(2-x)(x+3)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Všimněme si, že integrand je pravým zlomkem (protože stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele), a také toho, že ve jmenovateli jsou dva odlišné lineární výrazy. Proto vhodný tvar parciálních zlomků je

$$\frac{x}{(2-x)(x+3)} = \frac{A}{(2-x)} + \frac{B}{(x+3)}$$

kde A a B jsou konstanty, které brzy určíme. Sečteme oba výrazy na pravé straně pomocí společného jmenovatele:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(2-x)(x+3)} &= \frac{A}{(2-x)} + \frac{B}{(x+3)} \\ &= \frac{A(x+3)+B(2-x)}{(2-x)(x+3)} .\end{aligned}$$

Protože zlomek na levé straně je stejný jako na pravé straně pro všechny hodnoty x, a protože mají stejné jmenovatele, pak jejich čitatelé také musí být stejné. Takže z čitatelů, plyne

$$x = A(x+3) + B(2-x) . \tag{1}$$

Nyní najdeme hodnoty konstant A a B. Můžeme to udělat dvěma způsoby, nebo kombinací obou způsobů. První způsob je dosazování konkrétních hodnot pro x. Druhý způsob je zvlášť srovnávat koeficienty konstantních členů, lineárních členů, kvadratických členů, atd. Oba tyto způsoby budou ilustrované dále.

Dosazování konkrétních hodnot pro x

Vzhledem k tomu, že rovnice (1) platí pro všechny hodnoty x, můžeme dosadit za x libovolnou zvolenou hodnotu. Zejména, pokud necháme $x = 2$, druhý člen na pravé straně bude nulový a výraz vpravo se z jednodušší:

$$2 = A(2+3) + 0$$

odkud $5A = 2$ a tedy

$$A = \frac{2}{5} .$$

Podobně, nahrazení $x = -3$ v rovnici (1) nám opět z jednodušší výraz napravo:

$$-3 = 5B$$

ze které

$$B = -\frac{3}{5} .$$

Tedy parciální zlomky jsou

$$\frac{x}{(2-x)(x+3)} = \frac{2}{5(2-x)} - \frac{3}{5(x+3)} .$$

Oba členy na pravé straně můžeme zintegrovat:

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2}{5(2-x)}-\frac{3}{5(x+3)}\right)\mathrm{d}x &= -\frac{2}{5}\int\frac{-1}{2-x}\mathrm{d}x-\frac{3}{5}\int\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{5}\ln|2-x|-\frac{3}{5}\ln|x+3|+c\,.\end{aligned}$$

Všimněme si, že v prvním z integrálů jsme stanovili čitatel za -1 a kompenzovali jsme to tím, že jsme napsali znaménko mínus mimo integrál. Udělali jsme to proto, že derivace $2-x$ je -1 a integrál je ve standardní formě. Takže s použitím parciálních zlomků jsme rozdělili původní integrál do dvou samostatných integrálů.

Srovnání koeficientů

Druhá metoda pro nalezení A a B je srovnání koeficientů stejných členů na každé straně. Za prvé v rovnici (1) jsme roznásobili a dále jsme seskupili podobné výrazy:

$$\begin{aligned}x &= Ax+3A+2B-Bx\\ &= (A-B)x+3A+2B\,.\end{aligned}$$

Srovnáme koeficienty x na každé straně:

$$1 = A - B\,. \tag{2}$$

srovnání konstantních členů na obou stranách tohoto výrazu dává

$$0 = 3A + 2B\,. \tag{3}$$

Jedná se o soustavu dvou rovnic jejímž řešením najdeme A a B. Vynásobení rovnice (2) hodnotou 2 dává

$$2 = 2A - 2B\,. \tag{4}$$

Nyní sečteme (3) a (4), čímž se získá

$$2 = 5A$$

z nichž $A=\frac{2}{5}$. Také z rovnice (2) $B=A-1=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$ stejně jako jsme získali pomocí metody nahrazení konkrétních hodnot pro x. Často je vidět, že kombinace obou technik je efektivní.

Tématický příklad. Předpokládejme, že chceme spočítat $\int_1^2\frac{3}{x(x+1)}\mathrm{d}x$.

Všimněme si znovu, že integrand je pravým zlomkem a také toho, že jmenovatel má dva odlišné lineární výrazy. Proto vhodným tvarem parciálních zlomků je

$$\frac{3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}$$

kde A a B jsou konstanty, které musíme najít. Sečteme dva členy na pravé straně pomocí společného jmenovatele.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x(x+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}\\ &= \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}\,.\end{aligned}$$

Protože zlomek na levé straně je stejný jako na pravé straně pro všechny hodnoty x, a protože jejich jmenovatelé jsou stejní, pak jejich čitatelé také musí být stejní. Takže z čitatelů máme

$$3 = A(x+1) + Bx\,.$$

Dosadíme-li $x = 0$ můžeme okamžitě najít A:

$$3 = A(0+1) + B(0)$$

a $A = 3$.

Dosadíme-li $x = -1$ najdeme B:

$$3 = A(-1+1) + B(-1)$$

a $B = -3$. Pak

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[3\ln|x| - 3\ln|x+1|\right]_1^2 \\
&= (3\ln 2 - 3\ln 3) - (3\ln 1 - 3\ln 2) \\
&= 6\ln 2 - 3\ln 3 \\
&= \ln\frac{2^6}{3^3} \\
&= \ln\frac{64}{27}
\end{aligned}$$

Cvičení 1

1. Najděte každý z následujících integrálů pomocí metody parciálních zlomků.

(a) $\int \frac{1}{(x+2)(x+1)}\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x}{(2x+3)(x-4)}\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{3x+2}{(x-1)(x+7)}\mathrm{d}x$

Integrace racionálně lomené funkce s násobným lineárním výrazem

Pokud jmenovatel obsahuje opakované lineární výrazy je třeba dbát, aby obsahovaly správný tvar parciálních zlomků, jak je znázorněno v následujícím příkladu.

Tématický příklad. Najděte $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}\mathrm{d}x$.

V tomto příkladu ve jmenovateli máme opakovaný výraz. Přepíšeme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \\
&= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}\,.
\end{aligned}$$

Stejně jako dříve se zlomky na levé a pravé straně musí rovnat pro všechny hodnoty x. Jejich jmenovatelé jsou stejní, a tak můžeme srovnávat čitatele:

$$1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2\,. \tag{1}$$

Dosazením $x = 1$ v rovnici (1) dostaneme $1 = 2B$, ze které $B = \frac{1}{2}$.

Dosazením $x = -1$ dostaneme $1 = 4C$, ze které $C = \frac{1}{4}$.

Máme B a C a nahrazení jakékoliv hodnoty za x dá hodnotu A. Například, pokud necháme $x = 0$ zjistíme

$$1 = -A + B + C$$

a tak

$$1 = -A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

odkud $A = -\frac{1}{4}$. Případně bychom mohli rozšířit pravou stranu rovnice (1), seskupit podobné členy a najít koeficienty. To by poskytlo stejné hodnoty A, B a C.

Integrál se stává

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + c\,.\end{aligned}$$

Což pomocí logaritmických pravidel může být zapsáno v následující alternativní formě:

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c\,.$$

Cvičení 2

1. Integrujte každý z následujících integrálů metodou parciálních zlomků.
(a) $\int \frac{1}{(x+3)^2(x-1)}\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{2x+1}{(x+2)^2(x+1)}\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x+1}{x(x-7)^2}\mathrm{d}x$.

Integrace racionální lomené funkce v neryzím tvaru

Je-li stupeň čitatele větší nebo se rovná stupni jmenovatele, říkáme o funkci, že není ryzí. V takových případech je nutné nejprve provést dělení, jak je znázorněno v následujícím příkladu.

Tématický příklad. Najděte $\int \frac{x^3}{x^2-4}\mathrm{d}x$.

Stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele. Tato funkce není ryzí. Čitatele a jmenovatele můžeme rozložit pomocí dělení zlomků:

$$\begin{array}{rl} x^3 & : (x^2-4) = x \\ \underline{-x^3 + 4x} & \\ 4x & \end{array}$$

tedy

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}\,.$$

Všimněme si, že jmenovatel druhého člene na pravé straně je **rozdíl dvou mocnin** a to můžeme zapsat jako $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Tedy

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x^2-4} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}\,.\end{aligned}$$

Stejně jako dříve se zlomky nalevo a napravo musí rovnat pro všechny hodnoty x. Jejich jmenovatelé jsou stejní a čitatelé musí být také stejné. Srovnání čitatelů dá

$$4x = A(x+2) + B(x-2)\,.$$

Zvolením $x = 2$ máme $8 = 4A$ a $A = 2$. Volba $x = -2$ dává $-8 = -4B$ a $B = 2$. Takže s těmito hodnotami A a B se integrál stává

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + c\,.\end{aligned}$$

Cvičení 3

1. Použijte dělení polynomu polynomem a parciální zlomky pro následující integrály.

(a) $\int \frac{x^3+1}{1-x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^2+3x+3}{x+1}\mathrm{d}x$
(c) $\int \frac{7x-6}{x-1}\mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{7x^2+16x-19}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$

Odpovědi na cvičení

Cvičení 1

1. (a) $\ln|x+1| - \ln|x+2| + c$ (b) $\frac{3}{22}\ln|2x+3| + \frac{4}{11}\ln|x-4| + c$ (c) $\frac{5}{8}\ln|x-1| + \frac{19}{8}\ln|x+7| + c$.

Cvičení 2

1. (a) parciální zlomky jsou: $-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{16}\frac{1}{x-1}$;

integrál je $\frac{1}{4}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{16}\ln|x+3| + \frac{1}{16}\ln|x-1| + C$

(b) parciální zlomky jsou $\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$;

integrál je $-\frac{3}{x+2} + \ln|x+2| - \ln|x+1| + C$.

(c) parciální zlomky jsou $\frac{1}{49x} + \frac{8}{7(x-7)^2} - \frac{1}{49(x-7)}$;

integrál je $\frac{1}{49}\ln|x| - \frac{8}{7(x-7)} - \frac{1}{49}\ln|x-7| + C$.

Cvičení 3

1. (a) parciální zlomky jsou $-x - \frac{1}{x-1}$;

integrál je $-\frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + C$.

(b) parciální zlomky jsou $x + 2 + \frac{1}{x+1}$;

integrál je $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + C$.

(c) parciální zlomky jsou $7 + \frac{1}{x-1}$;

integrál je $7x + \ln|x-1| + C$.

(d) parciální zlomky jsou $7 + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1}$;

integrál je $7x + \ln|x+3| + \ln|x-1| + C$.