Integrace per partes

Speciální metoda, **integrace per partes (integrace po částech),** je použitelná při integrování součinu dvou funkcí. Tento leták odvozuje zmíněnou metodu a ilustruje ji na řadě příkladů.

Abychom zvládli tuto metodu, je důležité projít mnoha praktickými cvičeními, aby se stala naší druhou přirozeností.

Po přečtení tohoto textu, a případném shlédnutí videa, bychom měli být schopni:

- odvodit vzorec pro integraci per partes
- integrovat součin dvou funkcí použitím metody per partes

Obsah

I Úvod

Funkce často vznikají jako součin jiných funkcí a někdy je potřeba takový součin zintegrovat. Například můžeme být požádáni, abychom určili

$$\int x \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Zde je integrand součinem funkcí x a $\cos(x)$. Existuje metoda pro integraci součinu funkcí a v následující lekci je odvodíme.

II Odvození vzorce pro integraci per partes

Už víme, jak derivovat součin: pokud

$$y = u \cdot v$$

potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} = u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,.$$

Přeskupením této rovnice obdržíme:

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} - v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,.$$

A nyní zintegrujeme obě strany rovnosti:

$$\int u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x - \int v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \,.$$

První člen na pravé straně se zjednodušuje, protože jsme snadno zintegrovali to, co bylo zderivováno.

$$\int u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \,.$$

Tento vzorec je známý jako **integrace per partes.**

Vzorec nahrazuje jeden integrál (ten na levé straně) za jiný (ten pravé straně). Záměrem je, aby integrál na pravé straně byl jednodušší na výpočet, jak uvidíme v následujících příkladech.

III Použití vzorce pro integraci per partes

Příklad. Vypočítejte

$$\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zde se snažíme zintegrovat součin funkcí x a $\cos(x)$. Pro použití integrace per partes označíme jednu funkci jako $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ a druhou jako u. Ze vzorce si všimněme, že funkci, kterou položíme rovnu u, budeme derivovat, abychom nalezli $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. V našem případě položíme u rovno x, a když tuto funkci zderivujeme, dostaneme výpočet jednoho integrálu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$, tj. konstantu. Všimněme si, že vzorec nahrazuje jeden integrál (ten nalevo) jiným integrálem (tím napravo). Pečlivým výběre funkce u získáme méně komplikovaný integrál, než byl ten původní.
Zvolme

$$u = x \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos(x)\,.$$

Touto volbou a derivováním obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1\,.$$

Dále z $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$ integrováním nalezneme

$$v = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\,.$$

(V tuto chvíli se neznepokojujme integrační konstantou). Potom použijeme vzorec

$$\int u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\ :$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \sin(x) - \int (\sin(x)) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \end{aligned}$$

zde je c integrační konstanta.

V dalším příkladě uvidíme, že je v některých případech nezbytné použít metody per partes vícekrát.

Příklad. Vypočítejte

$$\int x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Musíme si zvolit, která funkce ze součinu bude u a která bude $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Obvykle volíme za u takovou funkci, která se derivací zjednoduší. V našem případě dává smysl volit takto

$$u = x^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x \qquad \text{and} \qquad v = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Poté použijeme vzorec pro integraci per partes.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \cdot 2 \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x} - \int \frac{2}{3} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Výsledný integrál je stále součin dvou funkcí $\frac{2}{3}x$ a e^{3x}. Můžeme použít metodu znovu, tentokrát dostaneme

$$u = \frac{2}{3} \cdot x \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3} \qquad \text{a} \qquad v = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Takže

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x} - \int \frac{2}{3} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x} - \left\{ \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{9} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{27} \cdot \mathrm{e}^{3x} + c \end{aligned}$$

zde c je integrační konstanta. Takže jsme integrovali metodou per partes dvakrát, než jsme získali výsledek.

Pamatujme, že abychom mohli použít vzorec, musíme být schopni zintegrovat funkci, kterou označíme jako $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Tato část může činit problémy, podívejme se na další příklad.

Příklad. Vypočítejte

$$\int x \cdot \ln|x|\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Připomeňme si vzorec:

$$\int u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bylo by přirozené zvolit $u = x$ a derivací tak získat $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$. Nicméně tato volba znamená zvolení $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \ln|x|$ a my musíme být schopni tuto funkci zintegrovat. U tohoto integrálu ale není známý standardní tvar. Proto v tomto případě zvolíme

$$u = \ln|x| \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x$$

z čehož

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \qquad \text{a} \qquad v = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\,.$$

Potom užitím vzorce

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln|x|\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|x| - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

kde c je integrační konstanta.

Příklad. Vypočítejte

$$\int \ln|x|\mathrm{d}x.$$

Řešení. Můžeme použít vzorec pro integraci per partes pro nalezení uvedeného integrálu pokud si uvědomíme, že $\ln|x|$ můžeme zapsat jako součin $1 \cdot \ln|x|$. Volíme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \text{a} \qquad u = \ln|x|$$

aby

$$v = \int 1\,\mathrm{d}x = x \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln|x|\mathrm{d}x &= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln|x| - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln|x| - x + c\end{aligned}$$

kde c je integrační konstanta.

Příklad. Vypočítejte

$$\int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Ať zvolíme za u a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ jakoukoli funkci, nemusí to nutně znamenat, že integrací per partes se integrál zjednoduší. Nicméně vyberme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \sin(x) \qquad \text{a} \qquad u = \mathrm{e}^x$$

takže

$$v = \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x) \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \\ &= -\cos(x) \cdot \mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x \cos(x) \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Nyní znovu použijeme metodu per partes a zvolíme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \qquad \text{a} \qquad u = \mathrm{e}^x$$

takže

$$v = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) \cdot \mathrm{e}^x + \left\{\mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x\right\} \\ &= -\mathrm{e}^x \cdot \cos(x) + \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Všimněme si, že integrál, se kterým jsme skončili, je stejný jako původní zadaný integrál. Nazvěme jej I, tj. $I = \int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Takže

$$I = \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \mathrm{e}^x \cdot \cos(x) - I$$

z toho

$$2I = \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)$$

a

$$I = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)\right] .$$

Takže

$$\int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x) - \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)\right] + c$$

kde c je integrační konstanta.

Cvičení. 1. Vypočítejte následující integrály:

(a) $\int x \cdot \sin(x)\,dx$ (b) $\int x \cdot \cos(4x)\,dx$ (c) $\int x \cdot e^{-x} dx$

(d) $\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx$ (e) $\int 2 \cdot x^2 \cdot e^x dx$ (f) $\int x^2 \cdot \ln|x|\,dx$

(g) $\int \tan^{-1}(x)\,dx$ (h) $\int \sin^{-1}(x)\,dx$ (i) $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

(j) $\int \sin^3(x)\,dx$

(Nápověda: zapište $\sin^3(x)$ jako $\sin^2 x \cdot \sin(x)$.)

2. Vypočítejte hodnotu následujících integrálů:

(a) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx$ (b) $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$ (c) $\int_1^2 x^3 \cdot \ln|x|\,dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} x^2 \cdot \sin(2x)\,dx$ (e) $\int_0^1 x \cdot \tan^{-1}(x)\,dx$

Odpovědi. 1.

(a) $-x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$ (b) $\frac{1}{4} \cdot x \cdot \sin(4x) + \frac{1}{16} \cdot \cos(4x) + C$

(c) $-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$ (d) $x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) + C$

(e) $2 \cdot x^2 \cdot e^x - 4 \cdot x \cdot e^x + 4 \cdot e^x + C$ (f) $\frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \ln|x| - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C$

(g) $x \cdot \tan^{-1}(x) - \ln|1 + x^2| + C$ (h) $x \cdot \sin^{-1}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$

(i) $e^x[\cos(x) + \sin(x)] + C$ (j) $-\frac{1}{3}[\cos(x) \cdot \sin^2(x) + 2 \cdot \cos(x)] + C$

2.

(a) $2\pi - 4$ (b) $e - 2$ (c) $4 \cdot \ln(2) - \frac{15}{16}$ (d) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ (e) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$