Kritéria konvergence

Ke zjištění, zda je řada konvergentní či nikoliv, slouží různá kritéria. V tomto dokumentu budete seznámeni se základními kritérii konvergence.

Kritéria konvergence

Určení součtu řady a tedy rozhodnutí o konvergenci nebo divergenci bývá často poměrně složité. V mnoha případech je postačující nahradit součet nekonečné řady s jejím n-tým částečným součtem s_n. Výhodou tohoto postupu je, že určením limity posloupnosti s_n je zároveň určen součet dané řady. K tomu však potrebujeme znát jednoduchý explicitní vzorec pro s_n, což se podaří jen ve velmi jednoduchých případech. Proto ve většině případů postupujeme jinak. Vyšetříme nejdříve konvergenci dané řady a její součet pak určíme přibližně.

Nový pojem: Srovnávací kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ budou řady s nezápornými členy, $a_n \leq b_n$. Potom platí, že

- konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Užitečná poznámka. Srovnávací kritérium má velkou nevýhodu v tom, že k vyšetrované řadě musíme zvolit nějakou jinou řadu, se kterou budeme srovnávat.

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Platí

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ má kvocient

$$q = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada je konvergentní, proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ je konvergentní.

Nový pojem: Integrální kritérium

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $a_n = f(n)$ pro $n \in N$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2 \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \lim_{b\to\infty} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^b = 2 \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b} - 4 = \infty.$$

Řada diverguje.

Nový pojem: Odmocninové kritérium – Cauchyovo

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Je-li

- $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada konverguje,
- $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada diverguje.

V případě $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Řada konverguje.

Nový pojem: Podílové kriterium – d'Alembertovo

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Je-li

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada konverguje,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada diverguje.

V případě $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{n!}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} =$$

$$\left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 < 1$$

Řada konverguje.

Kritérium, které rozhodne o konvergenci tzv. alternující řady – řady, jejíž členy pravidelně střídají znaménka, se nazývá Leibnizovo kritérium.

Nový pojem: Leibnizovo kritérium

Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, b_n > 0$, konverguje, platí-li

- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,
- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost.

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n}$.

Nejprve vypočítáme limitu posloupnosti $\frac{n+1}{2n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{2}.$$

Platí $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$, proto řada diverguje.

Tématický příklad. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Nejprve vypočítáme limitu posloupnosti $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Dále ověříme, zda je posloupnost klesající:

$$b_{n+1} \leq b_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+2},$$

$$1 \leq 2.$$

Platí, že posloupnost je klesající a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, proto daná řada konverguje.