MATH AND STATS SUPPORT CENTRE

sigma Σ

norway grants

Mocninné řady

V předcházejícím letáku jsme uvažovali řady, jejichž členy byla reálná čísla. Nyní se budeme zabývat studiem obecnějšího případu, kdy členy řad tvoří reálné funkce.

Funkční řady můžeme chápat jako zobecnění řad číselných. Při vyšetřování funkčních řad se budeme zabývat zejména určováním poloměru konvergence a oboru konvergence funkční řady, tedy množiny, pro jejíž prvky daná funkční řada konverguje.

Nový pojem: Funkční řada

Nechť v intervalu I je definována posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Funkční řadou rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + \cdots .$$

Nový pojem: Mocninná řada

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost, $x_0 \in R$. Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

se nazývá mocninná řada a číslo x_0 její střed.

Nový pojem: Obor konvergence

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na množině M a současně pro každé $x \notin M$ diverguje, nazývá se M oborem konvergence této řady.

Při určování oboru konvergence často s výhodou užíváme limitního podílového nebo odmocninového kritéria.

Tématický příklad. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots .$$

Střed řady $x_0 = 1$, posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$. Nejprve spočítáme poloměr konvergence

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Obor konvergence $(x_0 - R, x_0 + R)$ pro poloměr konvergence $R = 1$ je interval $(0, 2)$. Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty do dané řady dosadíme:

- pro $x = 0$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje,
- pro $x = 2$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$ diverguje.

Obor konvergence dané řady je interval $\langle 0, 2)$.

Tématický příklad. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n$.

Střed řady $x_0 = -2$, koeficient n-tého členu $a_n = 2^n$. Nejprve spočítáme poloměr konvergence

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Pro poloměr konvergence $R = \frac{1}{2}$ je obor konvergence $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty do dané řady dosadíme:

- pro $x = -\frac{5}{2}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverguje,
- pro $x = -\frac{3}{2}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverguje.

Obor konvergence dané řady je interval $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

Tématický příklad. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$.

Střed řady $x_0 = 0$, posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$. Nejprve spočítáme poloměr konvergence

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Pro poloměr konvergence $R = 1$ je obor konvergence (e^{-1}, e), protože

$$\ln x = 1 \Rightarrow x = e,$$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}.$$

Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty do dané řady dosadíme:

- pro $x = e^{-1}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (alternující řada),
- pro $x = e$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$ diverguje (harmonická řada).

Obor konvergence dané řady je interval $\langle e^{-1}, e)$.

Tématický příklad. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^n}{n+1}$.

Střed řady $x_0 = 4$, posloupnost $a_n = \frac{3^n}{n+1}$. Vyšetříme konvergenci pomocí podílového kritéria

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Pro poloměr konvergence $R = \frac{1}{3}$ je obor konvergence $(\frac{11}{3}, \frac{13}{3})$. Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty do dané řady dosadíme:

- pro $x = \frac{11}{3}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-\frac{1}{3})^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konverguje (alternující řada),
- pro $x = \frac{13}{3}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (\frac{1}{3})^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverguje.

Obor konvergence dané řady je interval $\left\langle \frac{11}{3}, \frac{13}{3} \right)$.