Hodnost matice

S každou maticí je spojené důležité číslo nazývané *hodnost*. Matice A typu $m \times n$ má n sloupcových vektorů a každý z nich má m složek. Nejvyšší počet sloupcových vektorů v A, které tvoří lineárně nezávislou množinu, se nazývá **hodnost matice** A a zapisuje se $h(\mathrm{A})$.

Nový pojem 1

Hodnost matice A, zapsaná jako $h(\mathrm{A})$, je nejvyšší počet lineárně nezávislých sloupcových vektorů v A. Pokud je A nulová matice, píšeme $h(\mathrm{A}) = 0$.

Tento pojem je životně důležitý pro uvedení hlavních výsledků v následující části týkající se existence a počtu řešení systémů lineárních rovnic.

Příklad 1

Hodnost matice A typu $n \times n$ nemůže přesáhnout číslo n, protože má pouze n sloupců. Ve skutečnosti je všech n sloupcových vektorů matice A lineárně nezávislých pouze tehdy a jen tehdy, pokud platí $|\mathrm{A}| \neq 0$.

Hodnost matice může být charakterizována pomocí jejich minorů. Obecně je **minor** k-tého řádu v A získán jako determinant matice typu $k \times k$ vzniklé vynecháním všeho až na k řádků a k sloupců.

Příklad 2

Určete všechny minory matice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: Protože zde máme pouze 3 řádky, můžeme určit minory řádu $1, 2$ a 3. Jsou zde:

(a) 4 *minory řádu* 3. Tyto minory jsou získány vynecháním některého ze čtyř sloupců:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) 18 *minorů řádu* 2. Tyto minory jsou získány vynecháním jednoho řádku a dvou sloupců a to všemi možnými způsoby. Jeden z nich je:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(vzniklý vynecháním druhého řádku a prvního a třetího sloupce)

(c) 12 *minorů řádu* 1. Jedná se o všech 12 jednotlivých prvků matice A.

Důležité tvrzení 1

Hodnost $h(\mathrm{A})$ matice A je rovna řádu největšího minoru této matice, který má hodnotu různou od nuly.

Pokud je A čtvercová matice řádu n, potom je svým vlastním největším minorem $|A|$. Tedy $h(A) = n$ tehdy a jen tehdy, pokud $|A| \neq 0$.

Příklad 3

Určete hodnost následujících matic:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Řešení:

(a) Hodnost matice je 3, protože $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ je nenulový minor řádu 3.

(b) Protože jsou sloupce $1, 3$ a 4 vzájemnými násobky, všechny minory řádu 3 jsou rovny nule, zatímco $\begin{vmatrix} \text{-1} & 0 \\ \text{-2} & 2 \end{vmatrix} = -2$. Hodnost je tedy rovna číslu 2.

(c) Všechny minory řádu 3 a 2 jsou rovny nule. Protože nejsou všechny prvku rovny nule, je hodnost matice rovna 1.

Důležité tvrzení 2

Hodnost matice A je rovna hodnosti matice transponované $h(A) = h(A^T)$.

Účinný způsob určení hodnosti matice

Metody použité výše nejsou pro určení hodnosti matice velmi účinná. Lepší přístup využívá faktu, že *hodnost matice není ovlivněna elementárními operacemi.*[1] V následujícím textu budeme značit transformaci pomocí elementárních operací matice A na matici B jako A $\sim$ B.

Příklad 4

Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení: Použijeme uvedené elementární operace. Tedy, vynásobíme první řádek číslem -2 a přičteme jej ke druhému řádku, a také vynásobíme první řádek číslem -1 a přičteme jej ke třetímu řádku, atd.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 1\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} + \text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost poslední matice je očividně 2, protože jsou zde přesně dva lineárně nezávislé řádky. Tedy hodnost původní matice je také 2.

[1]Elementární řádkové (sloupcové) operace jsou: (a) záměna dvou řádků (sloupců); (b) vynásobení řádku (sloupce) skalárem $k \neq 0$; (c) přičtení k-násobku řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci).

Hlavní důsledky pro lineární soustavy rovnic

Uvažujme obecnou lineární soustavu m rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{nebo-li } \mathrm{A}\cdot x = \mathrm{b}$$

kde A je matice s $m \times n$ koeficienty. Definujme novou matici $\mathrm{A_b}$ řádu $m \times (n+1)$, která obsahuje matici A v prvních n sloupcích a b v $n+1$-ním sloupci, tj.:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\mathrm{A}|\mathrm{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Pak se (A|b) nazývá **rozšířená** matice soustavy. Ukázalo se, že vztah mezi hodnostmi matic A a (A|b) je rozhodující pro určení, zda má systém rovnic řešení. Protože se všechny sloupce z A vyskytují v (A|b), je hodnost matice (A|b) jistě vyšší nebo rovna hodnosti matice A. Navíc, protože matice (A|b) obsahuje pouze o jeden sloupec více než matice A, hodnota $h(\mathrm{A}|\mathrm{b})$ nemůže být vyšší než $h(\mathrm{A})+1$.

Důležité tvrzení 3

Nutná a zároveň postačující podmínka pro existenci alespoň jednoho řešení soustavy lineárních rovnic je, že hodnost matice koeficientů je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy. Ve stručnosti:

$$\mathrm{A}\cdot x = \mathrm{b} \text{ má řešení } \iff h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A_b})$$

Poznámka
Pokud je matice A typu $n \times n$ a $h(\mathrm{A}) = n$, potom má soustava $\mathrm{A}\cdot x = \mathrm{b}$ řešení.

Co se stane se soustavou (1) pokud $h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A_b}) = k$ a současně platí (i) $k < m$ nebo (ii) $k < n$?

Důležité tvrzení 4

Předpokládejme, že soustava (1) má řešení $h(\mathrm{A}|\mathrm{b}) = k$.
(a) Pokud $k < m$, tj. obecná hodnota k je nižší než počet rovnic m, potom $m-k$ rovnic je **nadbytečných** ve smyslu, že pokud zvolíme libovolný podsystém rovnic odpovídající k lineárně nezávislým řádkům, pak jakékoli řešení těchto k rovnic současně vyhovuje zbývajícím $m-k$ rovnicím.

(b) Pokud $k < n$, tj. obecná hodnota k je nižší než počet neznámých n, potom zde existuje $n-k$ proměnných, které mohou být libovolně zvoleny, zatímco zbývajících k proměnných je jednoznačně určeno zvolením $n-k$ volných proměnných.
Soustava pak má $n-k$ **stupňů volnosti.**

Cvičení 1.
Určete hodnost následujících matic:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Cvičení 2.
Určete zda a kolik má systém rovnic řešení:

(a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$ (d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

Výsledky 1.
a) 1 b) 2 c) 3 d) 3 e) 2 f) 3
Výsledky 2.
a) $[1, 2, 2, 0]$ b) $[1, -1, -1, 1]$ c) $[0, 0, 0, 0]$ d) $\emptyset$