Násobení matic 1

Jednou z nejdůležitějších operací, které se provádí s maticemi, je násobení matic. Násobení matic je založeno na speciálním kombinování řádků první matice se sloupci druhé matice. Pokud máme řádek s čísly $3 \quad 7$ a sloupec s čísly $\begin{matrix}2\\9\end{matrix}$, provedeme součiny odpovídajících si hodnot a následně je sečteme takto:

Násobíme $\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 \cdot 2 & + & 7 \cdot 9\end{pmatrix} = (6+63) = (69)$$

Všimněme si, že jsme spárovali prvky v řádku první matice s prvky ve sloupci druhé matice, vynásobili tyto páry a výsledky sečetli. Jiný příklad je:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 \cdot 3 & + & 2 \cdot 6 & + & 5 \cdot 8\end{pmatrix} = (12+12+40) = (64)$$

Násobení matic obecněji

Pro matice A, B platí, že je můžeme vynásobit $(A \cdot B)$ pouze v případě, že počet sloupců první matice A je stejný, jako počet řádků druhé matice B. Toto je nezbytné, abychom byli schopni spárovat prvky tak, jako jsme to provedli výše. Pokud je matice A řádu $p \times q$, pak má p řádků a q sloupců, a matice B řádu $r \times s$ má r řádků a s sloupců, potom je můžeme vynásobit pouze v případě, že $q = r$. Pokud je tato podmínka splněna, pak výsledná matice C je řádu $p \times s$.

$$\begin{matrix} A & B & = & C \\ p \times q & r \times s & & p \times s \end{matrix} \qquad \underbrace{q \quad r}_{q=r}$$

Příklad. Vypočítejte součin $\begin{pmatrix}3 & 7\\4 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$.

Řešení. První matice je řádu 2×2 a druhá řádu 2×1. Je zřejmé, že počet sloupců v první matici je roven počtu řádků ve druhé matici. Násobení je tedy možné a výsledná matice bude řádu 2×1. Výpočet se provádí pomocí stejných operací jako v příkladech v předešlé části.

$$\begin{pmatrix}3 & 7\\4 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}$$

K získání první položky řešení ignorujme druhý řádek první matice. Už jsme viděli potřebné výpočty založené na sčítání součinů odpovídajících si prvků.

$$\begin{pmatrix}3 & 7\\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 \cdot 2 + 7 \cdot 9\\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}69\\ \end{pmatrix}$$

Pro získání druhé položky řešení ignorujme první řádek první matice.

$$\begin{pmatrix} & \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 53 \end{pmatrix}$$

A vše dohromady

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 7 \cdot 9 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Příklad. Vypočítejte součin matic $A \cdot B$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

Řešení. První i druhá matice jsou řádu 2×2. Jednoznačně počet sloupců v první je stejný jako počet řádků ve druhé. Proto je možné tyto matice vynásobit a výsledná matice bude řádu 2×2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 5 \cdot 6 + 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 48 \\ 12 & 57 \end{pmatrix}$$

Příklad. Vypočítej součin matic $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ pokud je to možné.

Řešení. První matice je řádu 2×1 a druhá matice je řádu 2×2. Počet sloupců první matice se neshoduje s počtem řádků matice druhé, proto není možné tyto dvě matice v tomto pořadí vynásobit.

Příklad. Nalezněte součin $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Řešení. První matice je řádu 2×2 a druhá matice je rádu 2×1. Očividně je počet sloupců první matice stejný, jako počet řádků druhé matice. Matice tedy lze mezi sebou vynásobit a výsledná matice bude řádu 2×1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$$

V dalších letácích této série jsou další příklady na násobení matic.