Násobení matic 2

V tomto druhém letáku, zaměřenému na násobení matic, se hlouběji ponoříme do podmínek, za nichž můžeme matice násobit a dále se podíváme na velikost matice, která je jejich součinem. Dále se podíváme na velmi užitečnou vlastnost jednotkové matice.

Připomeňme, že pokud je matice A řádu $p \times q$ (má p řádků a q sloupců) a matice B řádu $r \times s$ (má r řádků a s sloupců), pak je můžeme násobit pouze v případě, že $q = r$. Pokud je tato podmínka splněna, pak výsledná matice C je řádu $p \times s$.

$$\begin{array}{ccc} A \quad B & = & C \\ p \times \underbrace{q \quad r}_{q=r} \times s & & p \times s \end{array}$$

Příklad. Vypočítejte součin matic $M \cdot N$ jestliže $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Řešení. První matice je řádu 3×3 a druhá je řádu 3×2. Zjevně je počet sloupců první matice stejný, jako počet řádků druhé matice. Můžeme tedy násobit a výsledná matice bude řádu 3×2.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 16 & -25 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Podívejme se, co se stane, když zkusíme matice vynásobit v opačném pořadí. Tedy vypočítat $N \cdot M$:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

První matice je řádu 3×2 a druhá je řádu 3×3. Počet sloupců v první matici (2) NENÍ stejný jako počet řádků ve druhé matici (3). To znamená, že není možné provést výpočet.

Užitečná poznámka. Přestože je pro nějaké matice A a B definovaný součin $A \cdot B$, nemusí nutně existovat součin $B \cdot A$, kvůli řádu obou matic.

Příklad. Pro matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ vypočítejte součiny $C \cdot D$ a $D \cdot C$, je-li to možné.

Řešení. Řád matice C je 2×3 a matice D je 3×2. Tedy pokud uvažujeme $C \cdot D$, má první matice tři sloupce a druhá tři řádky. Je tedy možné vypočítat součin $C \cdot D$ a výsledná matice bude řádu 2×2 :

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot (-7) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 31 & -11 \end{pmatrix}$$

Uvažujme nyní součin $D \cdot C$. První matice je řádu 3×2 a druhá 2×3. Takže násobení matic je možné i v tomto pořadí a výsledná matice bude řádu 3×3 :

$$\begin{aligned} DC &= \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-7) \cdot 4 & 3 \cdot 2 + (-7) \cdot 5 & 3 \cdot 3 + (-7) \cdot 6 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -25 & -29 & -33 \\ 9 & 15 & 21 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tedy vidíme, že existují oba součiny $C \cdot D$ i $D \cdot C$, ale nejsou stejné.

Užitečná poznámka. Přestože jsou pro některé matice C a D definovány součiny $C \cdot D$ a $D \cdot C$, jsou obecně výsledné matice různé. Obecně platí, že $C \cdot D \neq D \cdot C$, tj. násobení matic **není komutativní.**

I když jsou součiny $C \cdot D$ a $D \cdot C$ stejného řádu, tyto součiny nemusí nutně být stejné. Uvažujme například matice $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$,

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 48 \\ 12 & 57 \end{pmatrix} \quad \textbf{ale} \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 30 \\ 43 & 23 \end{pmatrix}$$

Protože násobení matic není komutativní, že vždy důležité zapisovat násobené matice v zamýšleném pořadí.

Konečně se podíváme na důležitou vlastnost jednotkových matic: pokud násobíme libovolnou matici jednotkovou maticí patřičného řádu, pak výsledkem je stejná matice, se kterou jsme začínali. Například ověřte, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tento poznatek bude důležitý, až se dostaneme k používání matic při řešení soustav rovnic. Rovněž, pokud násobíme jednotkovou maticí z druhé strany, platí stejná vlastnost. Ověřte, že

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Další letáky z této série vysvětlují další maticové operace.