

## Řešení systémů lineárních rovnic pomocí sčítací, dosazovací a srovnávací metody

V praxi se často setkáváme s případy, kdy je potřeba řešit více rovnic, takzvaný **systém rovnic**, obvykle s více jak jednou neznámou. V tomhle letáku si vysvětlíme jak řešit systém lineárních rovnic pomocí tří metod: sčítací, dosazovací a srovnávací.

### Sčítací metoda

Základem sčítací metody je sčítat dvě rovnice tak, aby vypadla jedna proměnná (nebo i více proměnných).

**Tematický příklad.** Mějme následující dvě rovnice

$$4x + 2y = 10$$

$$3x - 2y = 4.$$

*Řešení.* Jejich sčítáním (sečteme spolu levé strany a pak pravé strany) získáme jednu rovnici o jedné neznáme, kterou umíme jednoduše řešit:

$$4x + 3x + 2y - 2y = 10 + 4$$

$$7x = 14$$

$$x = 2.$$

Potom z jedné z rovnic vyjádříme  $y$ ,

$$4x + 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10 - (4 \cdot 2)}{2} = 1.$$

Někdy je ovšem situace složitější a pouhé sčítání rovnic nevede k odstránení proměnné.

**Tematický příklad.** Sčítací metodou řešme systém

$$4x + 3y = -1$$

$$5x + 2y = 4.$$

*Řešení.* Když sečteme tyto dvě rovnice dostaneme novou rovnici

$$4x + 5x + 3y + 2y = -1 + 4$$

$$9x + 5y = 3,$$

která nám nepomůže, protože i nadále jsou v ni obě proměnné. Proto je potřeba obě rovnice před sčítáním nejdříve vynásobit vhodnou konstantou

$$4x + 3y = -1 \quad / \cdot 2$$

$$5x + 2y = 4 \quad / \cdot (-3)$$

a teprve pak je sčítat

$$\begin{aligned} 8x - 15x + 6y - 6y &= -2 - 12 \\ -7x &= -14 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Potom z jedné z rovnic vyjádříme  $y$ ,

$$4x + 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{-1 - (4 \cdot -2)}{3} = \frac{7}{3}.$$

### Důležité tvrzení 1: Sčítací metoda

Základem **sčítací metody** je sčítat dvě rovnice tak, aby vypadla alespoň jedna proměnná. Je-li to nutné, můžeme před sčítáním obě rovnice vynásobit vhodnými konstantami.

Tuto metodu lze využít při libovolném počtu rovnic a proměnných.

**Tematický příklad.** Řešme systém tří rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -1 \\ -2x - 2y + 3z &= 5 \\ 5x + 2y - z &= 3. \end{aligned} \tag{1}$$

*Řešení.* Sečtením první a druhé rovnice odstraníme proměnnou  $y$

$$x + 2z = 4. \tag{2}$$

Podobně můžeme sečíst druhou a třetí rovnici

$$3x + 2z = 8.$$

Dostáváme systém dvou rovnic o dvou neznámých, který už umíme řešit

$$\begin{aligned} x + 2z &= 4 \quad / \cdot (-1) \\ 3x + 2z &= 8 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Dosazením tohoto výsledku do (2) spočítáme

$$\begin{aligned} 2 + 2z &= 4 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Poslední neznámou vypočítáme z rovnice (1)

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + 2y - 1 &= -1 \\ y &= -3. \end{aligned}$$

### Důležité tvrzení 2: Postup sčítací metody

Máme-li více než dvě neznámé, sčítáme rovnice tak, aby nám nejdříve vypadla ze všech rovnic jedna zvolená neznámá. Postup opakujeme dokud nezískáme pouze jednu neznámou. Tu již umíme vypočítat a jejím dosazením do předešlých rovnic vypočítáme i zbylé proměnné.

## Dosazovací metoda

Dosazovací metoda se také užívá k výpočtu neznámých v systému lineárních rovnic. Řešením jedné rovnice ze systému si umíme vyjádřit, čemu se rovná jedna z proměnných. Tuto proměnnou pak dosadíme do zbylých rovnic.

### Tematický příklad.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x - 2y &= 8. \end{aligned}$$

*Řešení.* Z první rovnice si vyjádříme

$$y = 1 - 2x \quad (3)$$

a dosadíme do druhé rovnice

$$\begin{aligned} x - 2 \cdot (1 - 2x) &= 8 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Z rovnice (3) vidíme, že

$$y = 1 - 2 \cdot 2 = -3.$$

Při větším počtu rovnic a neznámých je postup podobný. Z jedné rovnice si vyjádříme libovolnou neznámou a dosadíme do zbylých rovnic. Pak z některé další rovnice vyjádříme další proměnnou, dosadíme do ostatních rovnic a tak dále, dokud se nedopracujeme k jediné neznámé.

### Tematický příklad. Řešme systém rovnic

$$x + y - z = 4 \quad (4)$$

$$x - 2y + 3z = -6 \quad (5)$$

$$2x + 3y + z = 7. \quad (6)$$

*Řešení.* Vyjádříme si z rovnice (4) proměnnou  $z$

$$z = x + y - 4. \quad (7)$$

Dosadíme ji do rovnic (5) a (6)

$$x - 2y + 3 \cdot (x + y - 4) = -6$$

$$2x + 3y + (x + y - 4) = 7$$

z čeho po úpravě dostaneme

$$4x + y = 6 \tag{8}$$

$$3x + 4y = 11. \tag{9}$$

A postupujeme dál v dosazování. Z rovnice (8) vyjádříme  $y$

$$y = 6 - 4x \tag{10}$$

a dosadíme do rovnice (9)

$$3x + 4 \cdot (6 - 4x) = 11$$

$$-13x = -13$$

$$x = 1.$$

Pak už stačí jenom dosadit do rovnic (10) a (7) a máme výsledek

$$y = 6 - 4 = 2$$

$$z = 1 + 2 - 4 = -1.$$

### Důležité tvrzení 3: Postup dosazovací metody

Řešení soustavy dosazovací metodou spočívá ve vyjádření libovolné neznámé z jedné rovnice a následném dosazení tohoto vyjádření za onu neznámou do zbylých rovnic.

## Srovnávací metoda

Tato metoda se hodně podobá metodě dosazovací. Ze všech rovnic si vyjádříme jednu a tu samou neznámou a tyto vyjádření porovnáme mezi sebou.

**Tematický příklad.** Uvažujme následující systém rovnic

$$3x - 2y = 2$$

$$7x + 3y = 43.$$

*Řešení.* Z obou rovnic si vyjádříme proměnnou  $y$

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x - 2}{2} \\ y &= \frac{43 - 7x}{3} \end{aligned} \quad (11)$$

a porovnáme je mezi sebou

$$\begin{aligned} \frac{3x - 2}{2} &= \frac{43 - 7x}{3} & / \cdot 6 \\ 9x - 6 &= 86 - 14x \\ 23x &= 92 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Výsledek nyní můžeme dosadit do rovnice (11)

$$y = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2} = 5.$$

#### Důležité tvrzení 4: Postup srovnávací metody

**Srovnávací metoda** spočívá v tom, že si z každé rovnice vyjádříme stejnou proměnnou a pak je vhodným způsobem porovnáme.

### Která z metod je lepší?

Všechny metody jsou rovnocenné. To znamená, že k řešení můžeme použít libovolnou z nich, vždy dospějeme ke stejnému výsledku. Je ovšem potřeba zvážit, která z nich bude jednodušší.

Metody můžeme taky kombinovat. Máme-li systém tří rovnic o třech neznámých, můžeme třeba v prvním kroku použít sčítací metodu, vyloučit jednu proměnnou a pak řešit dál systém dvou rovnic srovnávací nebo dosazovací metodou.

**Tematický příklad.** Uvažujme následující systém rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x + y - z &= 4. \end{aligned} \quad (12)$$

*Řešení.* Nejdříve použijeme sčítací metodu, druhou rovnici přičítáme k první a třetí

$$\begin{aligned} 3x - 2z &= 3 \\ 2x - 2z &= 6. \end{aligned}$$

Vidíme, že v obou rovnicích máme výraz  $2z$ . Vyjádříme si ho z obou rovnic a použijeme srovnávací metodu

$$\begin{aligned} 2z &= 3x - 3 & (13) \\ 2z &= 2x - 6 \\ 3x - 3 &= 2x - 6 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Nyní stačí pouze zpětným dosazením zjistit zbylé dvě neznámé. Třeba dosazením do rovnice (13)

$$\begin{aligned} 2z &= 3 \cdot (-3) - 3 = -12 \\ z &= -6 \end{aligned}$$

a pak do rovnice (12)

$$\begin{aligned} -3 + y - (-6) &= 4 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

#### Důležité tvrzení 5: Výběr metody

Všechny metody vedou ke stejným výsledkům. Při výpočtech můžeme používat libovolnou z nich a také je můžeme kombinovat.