Limity funkcí ve vlastních bodech

V tomto letáku si vysvětlíme, pojem (vlastní) limity funkce, když proměnná x míří ke konkrétnímu reálnému číslu. A také ukážeme příklady funkcí, které v daném bodě nemají žádnou limitu.
Za účelem zvládnutí zde vysvětlených technik, je vhodné projít řadou praktických cvičení.

Po přečtení tohoto letáku bychom měli být schopni:

- rozhodnout, zda funkce směřuje k reálné limitě, pokud x jde k danému reálnému číslu.

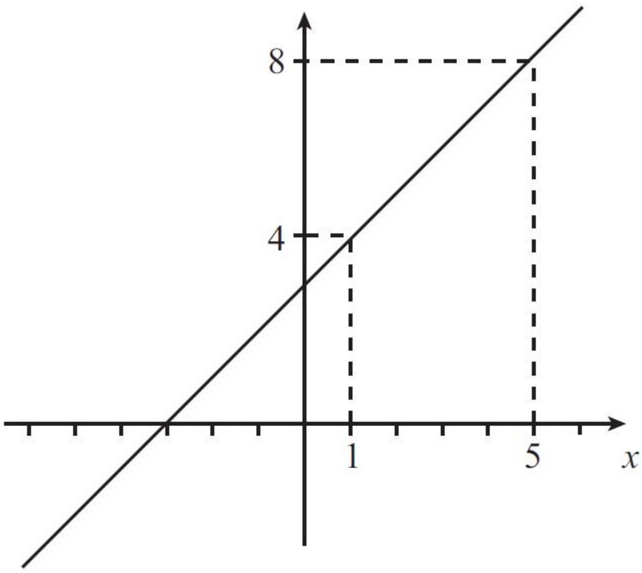
Limity funkce pro x jdoucí k reálnému číslu

Uvažujme funkci $f(x) = x + 3$. Pokud zvolíme číslo, třeba 1, potom pro x jdoucí k tomuto číslu se i funkce $f(x)$ blíží k nějakému číslu, v tomto případě k číslu 4. Píšeme

$$f(x) \to 4 \text{ pro } x \to 1\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 4\,.$$

Podobně se funkce $f(x)$ blíží číslu 8 pro x jdoucí k číslu 5. Potom píšeme

$$f(x) \to 8 \text{ pro } x \to 5\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to 5} f(x) = 8\,.$$



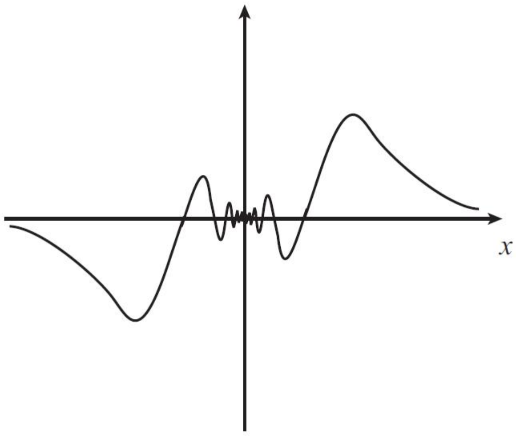
Obrázek 1: funkce $f(x) = x + 3$

V tuto chvíli nemusí vypadat tato definice limity příliš užitečně. Víme, že když $x = 1$, potom hodnota funkce $f(x)$ je 4. A znovu, když $x = 5$, potom hodnota funkce $f(x)$ je 8. Proč bychom se obtěžovali sledováním, co se stane, když se x přibližuje k těmto číslům?
Důvodem je, že občas pracujeme s funkcí, která není v nějakém bodě definovaná. Uvažujme například graf funkce $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Tato funkce je definovaná pro každou hodnotu kromě nuly,

protože pro $x = 0$ máme zlomek s nulou ve jmenovateli uvnitř funkce sinus. Pokud se ale podíváme na zbytek grafu, můžeme vidět, že funkce $f(x)$ se přibližuje k nule pro x jdoucí k nule. Potom píšeme

$$f(x) \to 0 \text{ pro } x \to 0\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

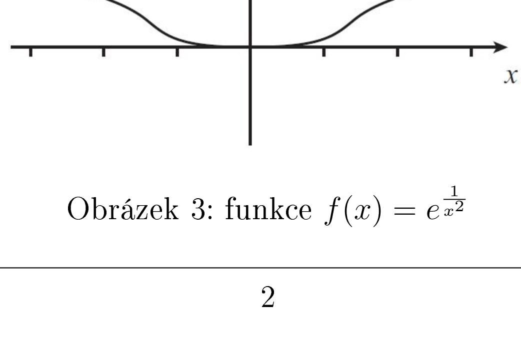
Mohli bychom říci, že $f(0)$ "by se mělo rovnat 0", i když pro nulu není funkce správně definovaná.



Obrázek 2: funkce $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

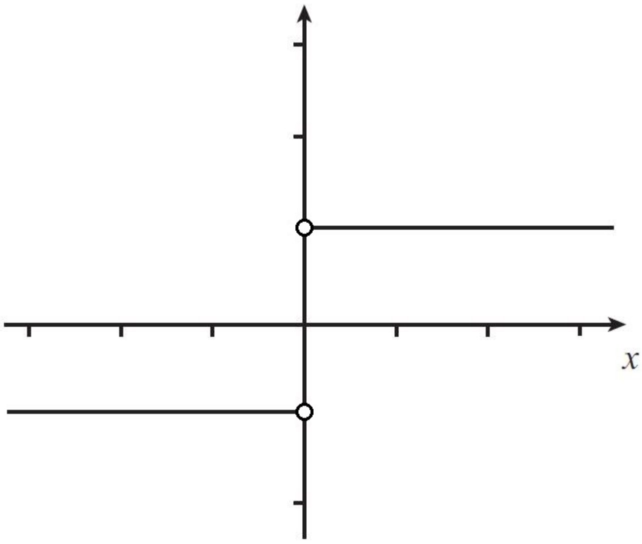
Takže limitu funkce $f(x)$, kde je funkce nedefinována si lze představit jako hodnotu, kterou by funkce měla v tomto bodě mít.
Podobná věc nastane u funkce $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Tato funkce se přibližuje k nule pro x jdoucí do nuly. Ale opět hodnota funkce v bodě $x = 0$ není definovaná, protože obsahuje zlomek s nulou ve jmenovateli. Nicméně můžeme vidět, že limita funkce je 0 pro x jdoucí do nuly, proto píšeme

$$f(x) \to 0 \text{ pro } x \to 0\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$



Obrázek 3: funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

Některé funkce nemají limitu v určitých bodech. Pokud si vezmeme funkci $f(x) = \frac{|x|}{x}$, pak pro $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Ale pro $x < 0$ máme $f(x) = -\frac{x}{x} = -1$. V bodě $x = 0$ je funkce nedefinovaná, protože by jmenovatel byl roven nule. Kdyby x bylo kladné, pak přibližováním k nule se zachovává hodnota funkce $f(x)$ na čísle 1. Ale pokud je x záporné a přibližuje se k nule, zachovává se hodnota funkce na -1. Takže tato funkce nemá limitu v $x = 0$.



Obrázek 4: funkce $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Důležitá poznámka
Limita funkce $f(x)$ pro x jdoucí k reálnému číslu je hodnota, ke které se $f(x)$ přiblíží, když x jde k tomuto reálnému číslu.

Cvičení

Najděte všechny následující limity ve vlastních bodech pokud existují. Pokud neexistují, určete, zda se funkce blíží do plus nebo mínus nekonečna, nebo zda limita neexistuje.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ (d) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$
(e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{1-x}$ (f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)$

Odpovědi

(a) 0 (b) nemá limitu (c) nemá limitu (d) nekonečno (e) 1 (f) nemá limitu