Limity funkcí v nevlastních bodech

V tomto letáku si vysvětlíme, co znamená, když funkce míří do nekonečna, mínus nekonečna nebo se blíží ke konkrétnímu reálnému číslu, zatímco x jde do nekonečna nebo mínus nekonečna. Také ukážeme příklady funkcí, které nemíří k žádné limitě.
Za účelem zvládnutí zde vysvětlených technik, je vhodné projít řadou praktických cvičení.

Po přečtení tohoto letáku bychom měli být schopni:

- rozhodnout, zda funkce směřuje do plus nebo mínus nekonečna, pokud x jde do nekonečna;
- rozhodnout, zda funkce směřuje do plus nebo mínus nekonečna, pokud x jde do mínus nekonečna.

Obsah

1. Limita funkce pro x jdoucí do nekonečna 2

2. Limita funkce pro x jdoucí do mínus nekonečna 6

Limita funkce pro x jdoucí do nekonečna

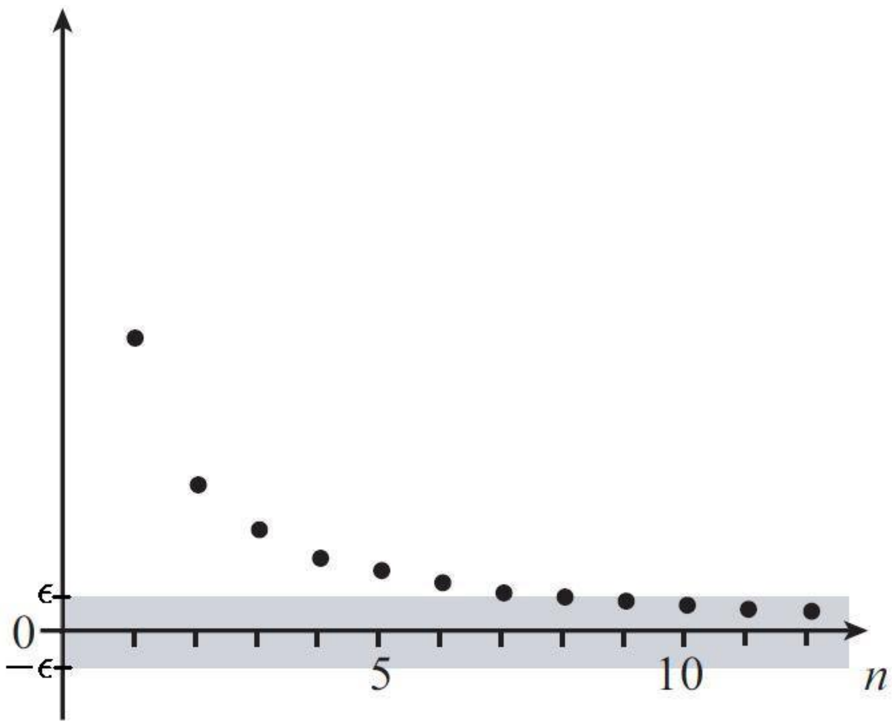
Máme-li posloupnost $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ pak číslo "l" je limita této posloupnosti, jestliže pro každý libovolně úzký pás v okolí bodu l najdeme člen posloupnosti y_m takový, že všechny členy s indexem větším než m patří do tohoto pásu.

Interpretační poznámka. Pásem je myšlený libovolně malý interval $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, kde ε je malé kladné číslo.

Jestliže posloupnost mát limitu l pro n jdoucí do nekonečna, píšeme

$$y_n \to l \quad \text{pro} \quad n \to \infty \quad \text{nebo také} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = l\,.$$

Uvažujme například posloupnost, kde $y_n = \frac{1}{n}$. Členy této posloupnosti se čím dál více přibližují k číslu nula. Zvolíme libovolně malé kladné číslo ε, pak od určitého indexu dál budou všechny členy y_n menší než toto číslo. Viz Obrázek 1. Takže členy y_n budou blíže k číslu nula než jakákoli vzdálenost, kterou si zvolíme. Řekneme, že posloupnost má limitu nula pro n jdoucí do nekonečna.



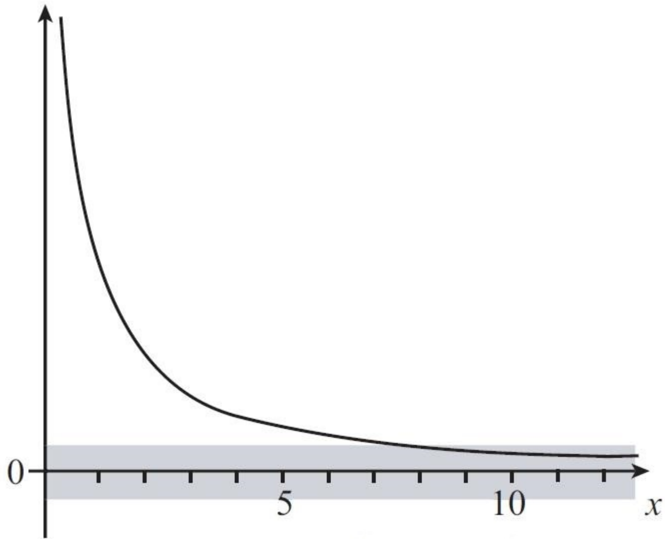
Obrázek 1: Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Zvolíme-li například $\varepsilon = \frac{1}{8}$, pás je tedy tvořen intervalem $(0-\frac{1}{8};\ 0+\frac{1}{8}) = (-\frac{1}{8}; \frac{1}{8})$. Potom každý člen posloupnosti y_n s indexem větším nebo rovným číslu 9 leží v pásu (intervalu) $(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8})$.

Limita funkce

Limitu funkce definujeme podobným způsobem. Například body posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ leží na grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$. Se zvětšující se hodnotou x se funkce $f(x)$ stále více blíží k nule. Jestliže zvolíme libovolné malé kladné číslo ε, pak pro všechna dostatečně velká x bude hodnota $f(x)$ menší než ε. Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu nula pro x jdoucí k nekonečnu a píšeme

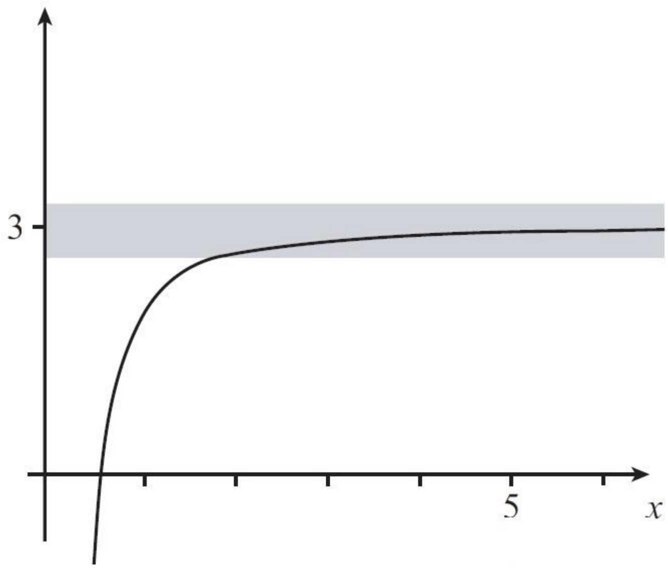
$$f(x) \to 0 \text{ pro } x \to \infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$



Obrázek 2: Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$

Další příklad funkce, která má limitu pro x jdoucí do nekonečna, je funkce $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$. Se zvětšujícím se x se funkce $f(x)$ přibližuje k hodnotě 3. Tedy řekneme, že $f(x)$ má limitu 3 pro x jdoucí do nekonečna a píšeme

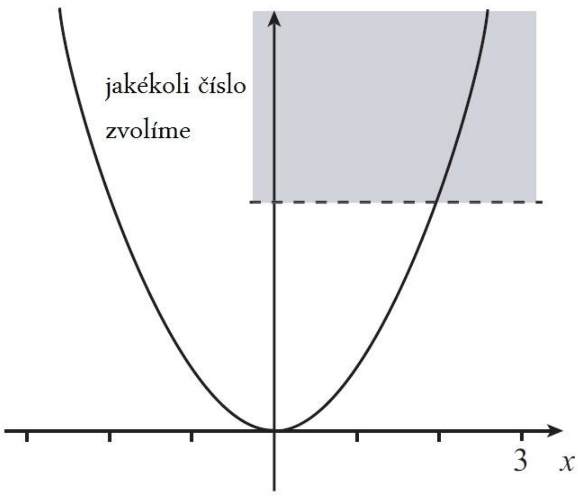
$$f(x) \to 3 \text{ pro } x \to \infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3\,.$$



Obrázek 3: Funkce $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

Samozřejmě ne všechny funkce mají vlastní limitu pro x jdoucí do nekonečna. Podívejme se na jiné typy chování. Vezmeme-li funkci $f(x) = x^2$ vidíme, že se $f(x)$ nepřibližuje k žádnému konkrétnímu číslu se vzrůstajícím x. Namísto toho se hodnota funkce $f(x)$ neustále zvyšuje. V určitém okamžiku $f(x)$ vzroste nad libovolnou hodnotu, kterou si určíme, a bude se i nadále zvyšovat. V tom případě řekneme, že $f(x)$ se blíží k nekonečnu pro x jdoucí do nekonečna a píšeme

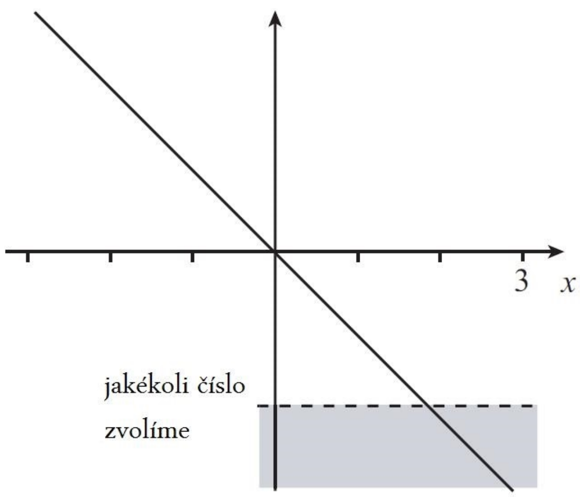
$$f(x) \to \infty \text{ pro } x \to \infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$



Obrázek 4: Funkce $f(x) = x^2$

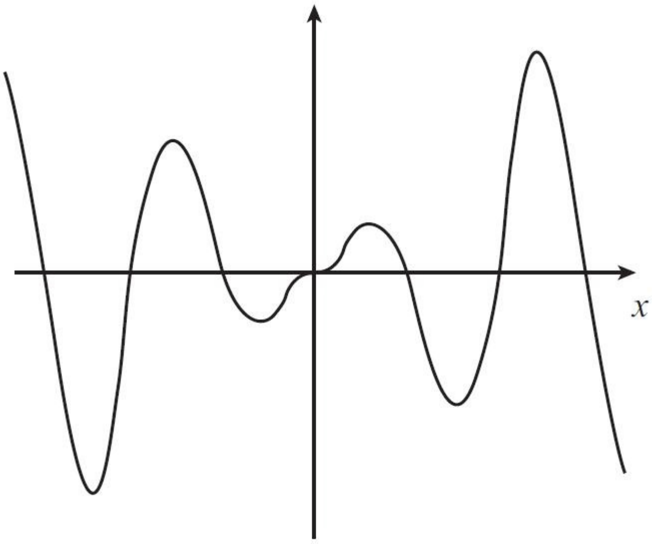
Funkce $f(x) = -x$ také nemá reálnou (vlastní) limitu pro x jdoucí do nekonečna. Se zvyšujícím x se tato funkce stává stále více zápornou. V tom případě řekneme, že funkce $f(x)$ má nevlastní limitu mínus nekonečno pro x jdoucí do nekonečna a píšeme

$$f(x) \to -\infty \text{ pro } x \to \infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,.$$



Obrázek 5: Funkce $f(x) = -x$

Některé funkce nemají žádný druh limity pro x jdoucí do nekonečna. Uvažujme například funkci $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Tato funkce se pro x jdoucí do nekonečna nepřibližuje k žádnému konkrétnímu reálnému číslu. Nicméně $f(x)$ nemíří ani do nekonečna, protože v určitém okamžiku začne klesat až k nule a dále jde do záporných hodnot a následně zase začne stoupat. Tento proces se neustále opakuje. Nelze tedy říct, že $f(x)$ má (vlastní nebo nevlastní) limitu pro x jdoucí do nekonečna.



Obrázek 6: Funkce $f(x) = x \cdot \sin x$

Důležitá poznámka
Funkce $f(x)$ má vlastní limitu l pro x jdoucí do nekonečna, pokud pro libovolně úzký pás $(l - \varepsilon;\ l + \varepsilon)$ existuje takové číslo x_0, že všechny funkční hodnoty funkce$f(x)$, kde x je větší nebo rovno číslu x_0 leží v pásu $(l - \varepsilon;\ l + \varepsilon)$.

Limita funkce $f(x)$ je plus nekonečno, pokud pro stále zvětšující se hodnotu x, roste hodnota funkce $f(x)$ nade všechny meze.

Limita funkce $f(x)$ je mínus nekonečno, pokud pro stále zvětšující se hodnotu x, klesá hodnota funkce $f(x)$ pod všechny meze.

Cvičení 1

U každé z následujících funkcí $f(x)$ nalezněte reálnou (vlastní) limitu, pro $x \to \infty$, pokud existuje. Pokud neexistuje, určete zda funkce směřuje do nekonečna, mínus nekonečna nebo nemá žádnou limitu.

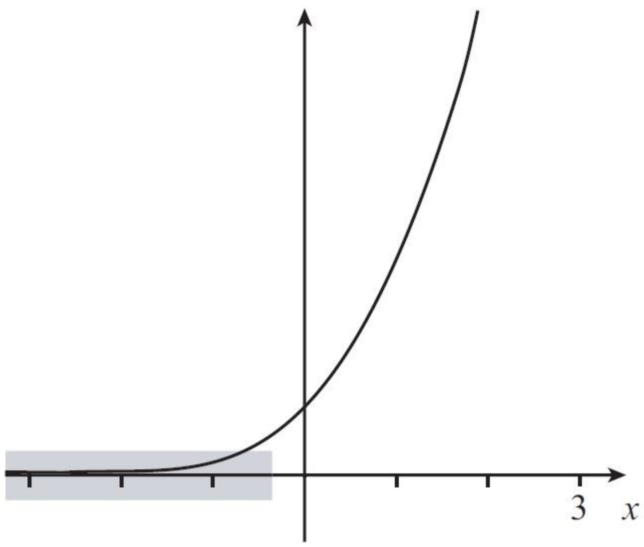
(a) $f(x) = 2x^2 - 3x^3$ (b) $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$ (c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (d) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$

(e) $f(x) = e^x \cdot \cos^2(x)$ (f) $f(x) = \mathrm{arctg}\,(x)$

Limita funkce pro x jdoucí do mínus nekonečna

Podobně, jako jsme definovali limitu funkce pro x jdoucí do nekonečna, můžeme definovat limitu pro x jdoucí do mínus nekonečna. Uvažujme funkci $f(x) = e^x$. Jak se hodnota x stává stále více zápornou, funkce $f(x)$ se přibližuje k nule. Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu nula pro x jdoucí do mínus nekonečna a píšeme

$$f(x) \to 0 \text{ pro } x \to -\infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,.$$



Obrázek 7: Funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$

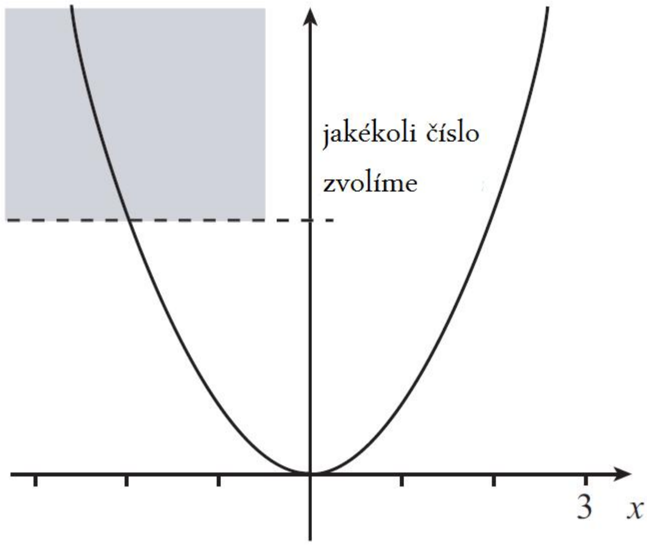
Obecně píšeme

$$f(x) \to l \text{ pro } x \to -\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

pokud pro libovolně námi zvolenou vzdálenost se funkce $f(x)$ dostane blíže k limitě l než je určená vzdálenost a bude se i nadále přibližovat pro stále více záporné x.
Pokud se pro stále více záporná x hodnota funkce zvyšuje a zůstává vyšší, než libovolné námi zvolené číslo, píšeme

$$f(x) \to \infty \text{ pro } x \to -\infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty\,.$$

Uvažujme například znovu funkci $f(x) = x^2$. Již jsme viděli, že tato funkce se blíží nekonečnu pro x jdoucí do nekonečna. Ale zároveň se blíží nekonečnu pro x jdoucí do mínus nekonečna.

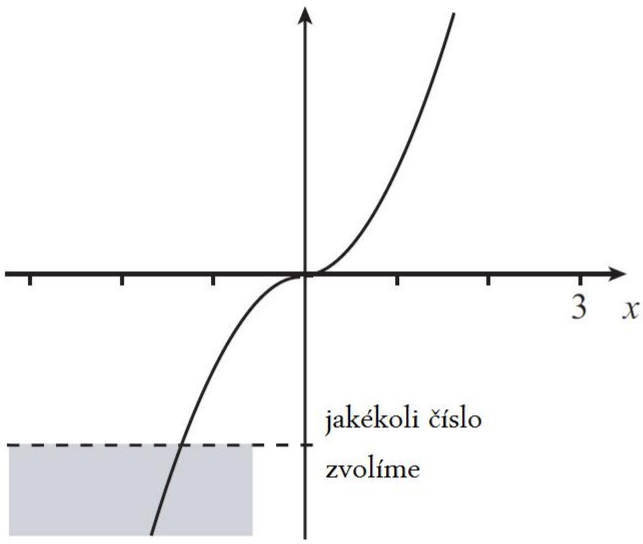


Obrázek 8: Funkce $f(x) = x^2$

Pokud pro x jdoucí k mínus nekonečnu Funkce klesá pode všechny meze, píšeme

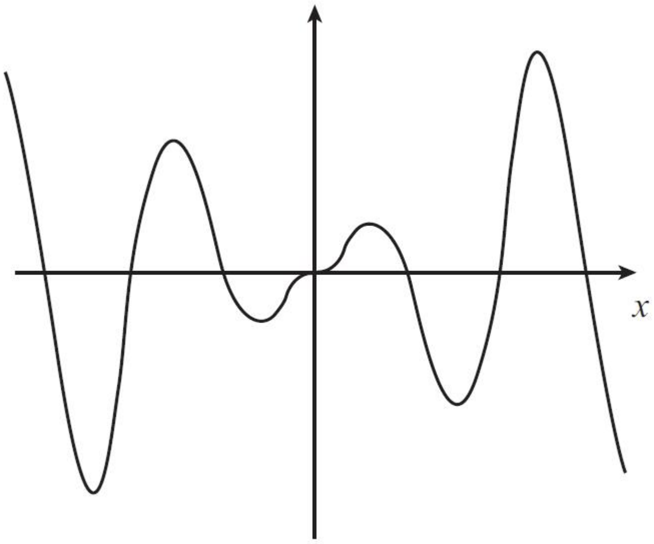
$$f(x) \to -\infty \text{ pro } x \to -\infty\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Jako příklad uvažujme funkci $f(x) = x^3$. Můžeme vidět, že pro stále více záporné x se i x^3 stává více a více záporné. Tedy $f(x)$ se blíží mínus nekonečnu pro x jdoucí do mínus nekonečna.



Obrázek 9: Funkce $f(x) = x^3$

Některé funkce nemají žádnou limitu pro x jdoucí do mínus nekonečna. Uvažujme například funkci $f(x) = x \cdot \sin(x)$, kterou jsme viděli už dříve. Tato funkce se pro x jdoucí do mínus nekonečna nepřibližuje k žádnému konkrétnímu reálnému číslu. Nicméně se funkce $f(x)$ neblíží ani nekonečnu, protože se nezvětšuje nad libovolně zvolenou hodnotu pro zmenšující se x. Z podobného důvodu se funkce $f(x)$ neblíží ani mínus nekonečnu. Proto nemůžeme hovořit o limitě funkce pro x jdoucí do mínus nekonečna.



Obrázek 10: Funkce $f(x) = x \cdot \sin x$

Důležitá poznámka
Funkce $f(x)$ má vlastní limitu l pro x jdoucí do mínus nekonečna, pokud pro libovolně úzký pás $(l - \varepsilon;\ l + \varepsilon)$ existuje takové číslo x_0, že všechny funkční hodnoty funkce $f(x)$, kde x je menší nebo rovno číslu x_0 leží v pásu $(l - \varepsilon;\ l + \varepsilon)$.

Limita funkce $f(x)$ je plus nekonečno, pokud pro stále snižující se hodnotu x, roste hodnota funkce $f(x)$ nade všechny meze.

Limita funkce $f(x)$ je mínus nekonečno, pokud pro stále snižující se hodnotu x, klesá hodnota funkce $f(x)$ pod všechny meze.

Cvičení 2

Pro každou funkci $f(x)$ ze **Cvičení 1** najděte reálnou (vlastní) limitu pro $x \to -\infty$ pokud existuje. Pokud neexistuje, určete, zda se funkce blíží nekonečnu nebo mínus nekonečnu. Případně zda funkce $f(x)$ má nějakou limitu.

Odpovědi

1.

(a) mínus nekonečno (b) nemá limitu (c) 1 (d) 0 (e) nemá limitu (f) $\frac{\pi}{2}$

2.

(a) nekonečno (b) nemá limitu (c) 1 (d) nemá limitu (e) 0 (f) $-\frac{\pi}{2}$