

Řešení příkladů na procvičení pravděpodobnosti¹

1. ŘEŠENÍ

Škola:

Š...Jakub úspěšně dokončí školu

Š₃... v komisii sú práve 3 zhovievaví profesori

Š₄... v komisii sú práve 4 zhovievaví profesori

Š₅... v komisii sú práve 5 zhovievaví profesori

Š = Š₃ ∪ Š₄ ∪ Š₅ V komisii musia byť aspoň 3 zhovievaví profesori (to znamená 3, 4 alebo 5).

$$m(\Omega) = \binom{12}{5} = 792$$

$$P(\check{S}) = \frac{m(\check{S})}{m(\Omega)}$$

$$P(\check{S}) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} + \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{7}{5}}{\binom{12}{5}} = \frac{350 + 175 + 21}{792} = \frac{546}{792} = \frac{91}{132}$$

F...Jakub založí firmu

B...Jakub dostane od banky pôžičku

$$P(F) = P(B \cap \check{S}) = P(B) \cdot P(\check{S})$$

$$P(F) \geq 0,5$$

$$P(B) \cdot P(\check{S}) \geq 0,5$$

$$P(B) \geq \frac{0,5}{P(\check{S})}$$

$$P(B) \geq \frac{0,5}{\frac{91}{132}}$$

$$P(B) \geq \frac{66}{91}$$

Musíme teda zistiť, v koľkých bankách musí Jakub požiadať o pôžičku, aby pravdepodobnosť, že mu ju poskytne aspoň 1 z bánk bola aspoň $\frac{66}{91}$.

B_iJakub získa pôžičku v i-tej banke $P(B_i) = 0,2$

B....Jakub získa pôžičku aspoň v jednej z bánk

$$P(\cup B_i) = 1 - P(B_1') \cdot \dots \cdot P(B_n')$$

i je od 1 po n

$$P(B) = 1 - 0,8^n$$

$$1 - 0,8^n \geq \frac{66}{91}$$

$$1 - \frac{66}{91} \geq 0,8^n$$

$$\frac{25}{91} \geq 0,8^n$$

¹ Příklady vytvořili studenti předmětu BPM_STA1

$$\ln \frac{25}{91} \geq \ln 0,8^n$$

$$\ln \frac{25}{91} \geq n \cdot \ln 0,8$$

$$\frac{\ln \frac{25}{91}}{\ln 0,8} \leq n$$

$$5,7899 \leq n$$

Jakub musí požiadať o pôžičku aspoň v 6 bankách, aby bola aspoň 50% pravdepodobnosť, že založí firmu.

2. ŘEŠENÍ

a) práve v 5 zošitoch je d. úloha alebo práve v 6 zošitoch je d. úloha alebo práve v 7 zošitoch je d.úloha

$$P(A) = \frac{C_{20}^5 \cdot C_{10}^2}{C_{30}^7} + \frac{C_{20}^6 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^7} + \frac{C_{20}^7}{C_{30}^7}$$

$$P(A) = 0,34 + 0,19 + 0,04 = \underline{\underline{0,57}}$$

Pravdepodobnosť, že aspoň v 5 zošitoch, ktoré učiteľ náhodne vyberie, bude domáca úloha, je 57 %.

b) vypočítame pravdepodobnosť, že v žiadnom zošite nie je d. úloha (opačný jav)

$$P(B^c) = \frac{C_{10}^7}{C_{30}^7} = 0,00006$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0,00006 = \underline{\underline{0,99994}}$$

Pravdepodobnosť, že aspoň v 1 zošite, ktorý učiteľ náhodne vyberie, bude domáca úloha, je 99,994 %.

3. ŘEŠENÍ

A..... ČEZ $P(A) = 0,85$

B.....Kofola.... $P(B) = 0,7$

C.....Fortuna... $P(C) = 0,65$

D....Unipetrol.. $P(D) = 0,5$

E...Telefonica... $P(E) = 0,4$

$$P(I) = P(A \cap B \cap C \cap D \cap E)$$

$$P(I) = 0,85 * 0,7 * 0,65 * 0,5 * 0,4$$

$$P(I) = 0,07735$$

$$\mathbf{P(I) = 7,735 \%}$$

PAN NEOMYLNÝ NEBUDE INVESTOVAT.

4. ŘEŠENÍ

$$m(A') = (74 \text{ nad } 10)$$

$$m(\Omega) = (124 \text{ nad } 10)$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - m(A') / m(\Omega) = 0,9956$$

5. ŘEŠENÍ

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) = 0,4 + 0,8 - 0,9 = 0,3$$

6. ŘEŠENÍ

11tý student pochází ze 790 studentů (800-10)

$$0,8 \times 800 = 640 - 10 = 630$$

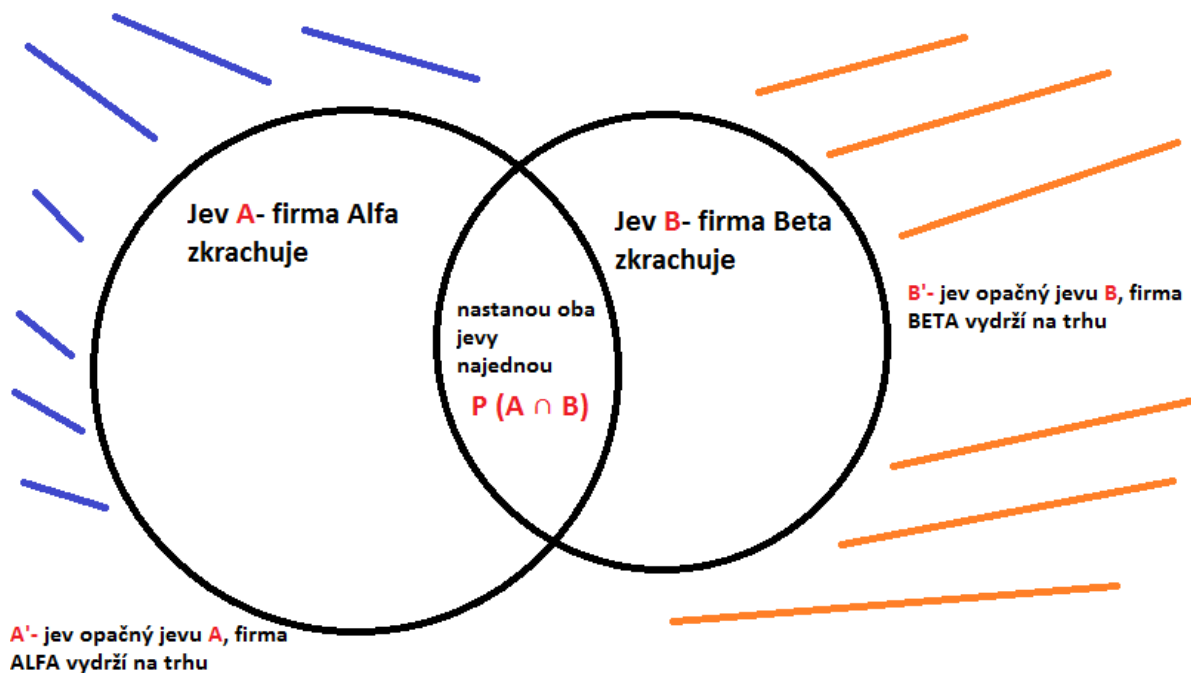
$$m(A) = 630$$

$$m(\Omega) = 790$$

$$P(A) = m(A)/m(\Omega) = 630/790 = \underline{0,7975} \text{ (po zaokrouhlení)}$$

7. ŘEŠENÍ

Nejprve si musím uvědomit, o jaký typ pravděpodobnosti se jedná. Zadání nám napovídá, že jde o podmíněnou pravděpodobnost, jelikož existuje situace, kdy oba jevy nastanou zároveň. Společné nastoupení obou jevů je dokonce v rámci pokusu pravděpodobnější, než bychom očekávali.



Nyní si určím jevy:

-A..... firma ALFA zkrachuje $P(A) = 35\% = 0,35$

-B..... firma BETA zkrachuje $P(B) = 20\% = 0,20$

-A' firma ALFA se udrží na trhu (opačný jev k A) $P(A') = 1 - 0,35 = 0,65$

-B' firma BETA se udrží na trhu (opačný jev k B) $P(B') = 1 - 0,20 = 0,80$

$$P(A \cap B) = 6\% = 0,06$$

Mohu si pro kontrolu ověřit závislost/nezávislost:

$P(A) \cdot P(B) = 0,35 \cdot 0,20 = 0,07$, že nastanou oba jevy zároveň, takovýto výsledek by byl u nezávislých jevů, ze zadání víme, že pravděpodobnost nastoupení obou jevů je menší, proto se jedná o závislé jevy a nemohu je tedy mezi sebou násobit.

Nyní samotné odpovědi na jednotlivé otázky:

a) Jaká je pravděpodobnost, že obě firmy budou fungovat?

-spojení „obě firmy“ ze zadání nám napovídají, že se jedná o průnik obou jevů, zde jsou však jako klasické jevy uvedeny situace, kdy podnik krachuje, počítám tedy průnik jevů opačných. Obecně platí: $P(A' \cap B') = P(A') + P(B') - P(A' \cup B')$ - podle obecného vzorce sečtu pravděpodobnosti a musím odečíst ještě jejich sjednocení, abych žádný kousek nezapočítala 2x (jsou totiž závislé)

$$P(A' \cap B') = 0,65 + 0,80 - P(A' \cup B')$$

$P(A' \cup B')$ - dopočítám si, opět mám obecný vzorec pro výpočet:

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cup B') = 1 - 0,06$$

$$P(A' \cup B') = 0,94$$

Nyní jen dosadím od původního vzorce:

$$P(A' \cap B') = 0,65 + 0,80 - 0,94$$

$$P(A' \cap B') = 0,51$$

$$\underline{P(A' \cap B') = 51\%}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že obě firmy budou fungovat, je 51%.

b) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna firma v tomto pokusu opustí trh?

-spojení „alespoň jedna firma“ naznačuje, že se snažím zjistit sjednocení.

Obecný vzorec: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = 0,35 + 0,20 - 0,06$$

$$P(A \cup B) = 0,49$$

$$\underline{P(A \cup B) = 49\%}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že alespoň jedna firma v pokusu neuspěje a opustí trh, je 49%.

8. ŘEŠENÍ

Najskôr vyberieme možné pozície čísel 2 a 4- to môžeme uviesť celkom 4×5 spôsobmi, čiže 20. Na zostávajúce pozície musíme dať čísla 1, 3 a 5- jednotka musí byť ako posledná z týchto troch čísel. Z toho vyplýva, že tieto čísla môžeme uviesť iba v poradí 3,5,1 alebo 5,3,1- celkovo dvomi spôsobmi. Dohromady dostávame $20 \times 2 = 40$ rôznych spôsobov.

$$m(A) = 40$$

$$P(A) = 40/5! = 40/120 = 1/3$$

9. ŘEŠENÍ

Najprv označíme javy:

R....Riaditeľ je v práci

M....Majster dohliada na robotníkov

F....Výrobok je chybný

$$P(R) = \frac{2}{5} \text{ (počas piatich pracovných dní príde dvakrát)}$$

$$P(R') = 1 - P(R) = \frac{3}{5}$$

$$P(M/R) = \frac{1}{2}$$

$$P(M'/R) = 1 - P(M/R) = \frac{1}{2}$$

$$P(M/R') = \frac{1}{6}$$

$$P(M'/R') = 1 - P(M/R') = \frac{5}{6}$$

$$P(F/M \cap R) = \frac{1}{10}$$

$$P(F/M' \cap R) = \frac{1}{5}$$

$$P(F/M \cap R') = \frac{1}{4}$$

$$P(F/M' \cap R') = \frac{1}{2}$$

a) $P(F) = ?$

$$P(F) = P(F \cap M \cap R) + P(F \cap M \cap R') + P(F \cap M' \cap R) + P(F \cap M' \cap R')$$

$$P(F) = P(R) \cdot P(M/R) \cdot P(F/M \cap R) + P(R') \cdot P(M/R') \cdot P(F/M \cap R') + P(R) \cdot P(M'/R) \cdot P(F/M' \cap R) + P(R') \cdot P(M'/R') \cdot P(F/M' \cap R')$$

$$P(F) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{50} + \frac{1}{40} + \frac{1}{25} + \frac{1}{4} = \frac{67}{200} = 0,335$$

b) $P(R/F) = ?$

$$P(R/F) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$

$$P(R \cap F) = P(F \cap M' \cap R) + P(F \cap M \cap R) = \frac{1}{25} + \frac{1}{50} = \frac{3}{50} = 0,06$$

$$P(F) = 0,335$$

$$P(R/F) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)} = \frac{0,06}{0,335} = \frac{12}{67} = 0,1791$$

Pravdepodobnosť, že výrobok bude chybný je 0,335. Ak je výrobok chybný, pravdepodobnosť, že riaditeľ bol v ten deň v práci je 0,1791.

10. ŘEŠENÍ

$$a) P(A1) = (8 \cdot 7 \cdot 12 + 8 \cdot 12 \cdot 11 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 12 \cdot 7) / (20 \cdot 19 \cdot 18) = 0,4$$

$$b) P(A2) = (8 \cdot 7 \cdot 12 + 8 \cdot 12 \cdot 11 + 12 \cdot 8 \cdot 11 + 12 \cdot 11 \cdot 10) / (20 \cdot 19 \cdot 18) = 0,6$$

$$c) P(A2 \cap A1) = P(A1) \cdot P(A2|A1) = 0,4 \cdot ((8 \cdot 7 \cdot 12 + 8 \cdot 12 \cdot 11) / (20 \cdot 19 \cdot 18)) = 0,162807$$

11. ŘEŠENÍ

$$P(A) = (30/32) * (29/31) * (28/30) * (27/29) * (26/28) * (25/27) * (24/26) * (23/25) * (22/24) * (21/23) * (20/22) * (19/21) * (18/20) * (2/19) = 9/248$$

12. ŘEŠENÍ

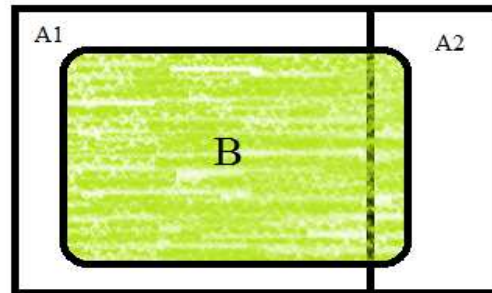
A_1 ... připraví se $\rightarrow P(A_1) = 0,75$

A_2 ... nepřipraví se $\rightarrow P(A_2) = 0,25$

B ... zkoušku složí úspěšně $\rightarrow P(B) = 0,69$

$P(B|A_1) = 0,9$

$P(B|A_2) = ?$



Výpočet přes úplnou pravděpodobnost:

$$P(B) = P(B|A_1) * P(A_1) + P(B|A_2) * P(A_2)$$

$$0,69 = 0,9 * 0,75 + 0,25 * P(B|A_2)$$

$$P(B|A_2) = 0,06 = 6\%$$

Pravděpodobnost, že nepřipravený student zkoušku udělá je 6%.

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0,25 * 0,06}{0,69} = 0,0217$$

Pravděpodobnost, že se náhodně vybraný student neučil, pokud víme, že zkoušku složil je 2,17%.

13. ŘEŠENÍ

A..... zvládne mikroekonomii..... $P(A) = 368/554 = 0,66426$

B.....zvládne makroekonomii..... $P(B) = 254/554 = 0,45848$

$$P(A \cap B) = 0,45848$$

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

$$P(B|A) = 0,45848/0,66426$$

$$P(B|A) = 0,69021$$

$$\mathbf{P(B|A) = 69 \%}$$

14. ŘEŠENÍ

- první volba -> Honza princeznu „krásku“
- druhá volba-> Matěj princeznu „ošklivku“
- hledaná pravděpodobnost – Matěj „ošklivku“ za předpokladu, že Honza si vybere „krásku“

Mo = Matěj, „ošklivka“

Hk = Honza, „kráska“

$$P(\text{Mo}/\text{Hk}) = 3/6 = \underline{0,5}$$

15. ŘEŠENÍ

Nejprve si musíme ujasnit, o jaký typ pravděpodobnosti se jedná. V tomto případě můžeme vyloučit nezávislost jevů (tím pádem není možné jevy násobit), protože podmínkou je, že jevy platí oba zároveň a my hledáme pravděpodobnost této podmínky.

Určení a pojmenování jevů:

-A..... firma se udrží na trhu 40 let $P(A) = 3\,540/10\,000 = 0,3540$

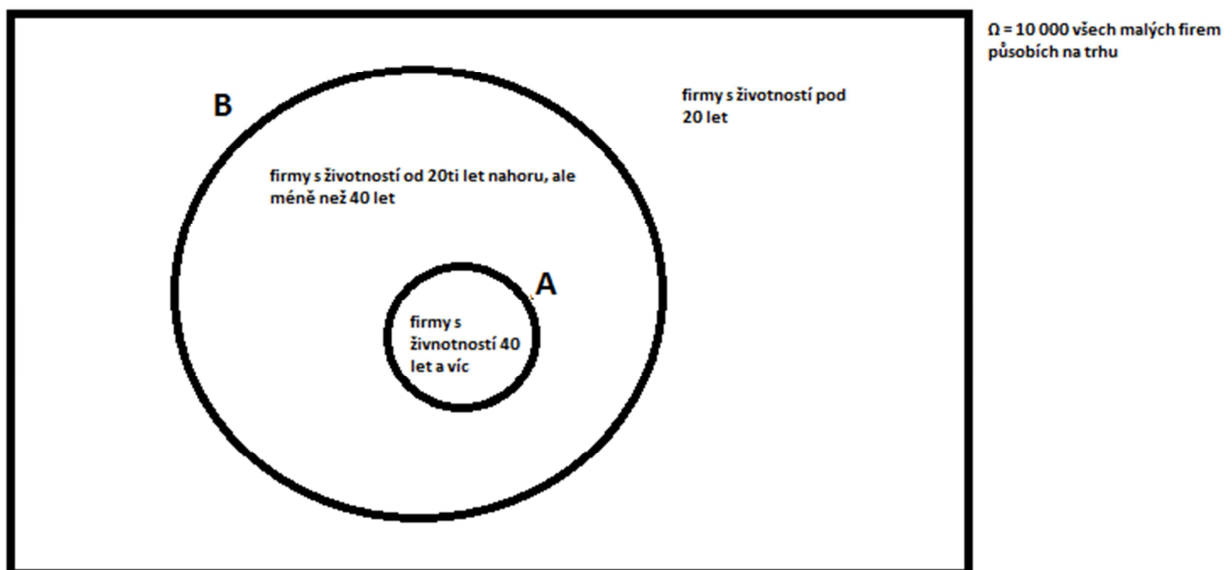
-B..... firma se udrží na trhu 20 let $P(B) = 7\,852/10\,000 = 0,7852$

K výpočtu použijí obecný vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Abych si mohla do vzorce dosadit, potřebuji nejprve znát průnik pravděpodobnosti A s pravděpodobností B, ten je možné si velmi lehce odvodit, jelikož jev B je podmnožinou jevu A (aby se firma mohla udržet na trhu 40 let, musí nejprve překonat 20ti letou životnost, jiný možný scénář je pouze odchod firmy z trhu):

$$P(A \cap B) = 0,3540$$



Poté jen dosadím do vzorce:

$$P(A/B) = 0,3540 / 0,7852$$

$$P(A/B) = 0,4508$$

$$\underline{P(A/B) = 45 \%} \text{ (po zaokrouhlení)}$$

Shrnutí slovy: Počítám, s jakou pravděpodobností nastane jev A za podmínky, že platí jev B. V našem případě s jakou pravděpodobností se tedy společnost udrží na trhu 40 let, za předpokladu, že se na trhu udržela před tím 20 let.

Složitost podobných příkladů podle mne není ve výpočtu, ale v samotném uvědomění si, jaká pravidla zde platí. Hned na začátku jsme si ujasnili, že se jedná o jevy závislé, nemohu je tedy mezi sebou násobit. Poté je třeba pochopit, že Jev A je podmnožinou jevu B, jelikož firma má pouze 2 možnosti, prosperovat a udržet se na trhu do námi stanovených hranic 20 nebo 40 let, nebo nesplnit tuto podmínku a odejít u trhu dříve. V tomto nejlépe poslouží obrázek.

Odpověď: Pravděpodobnost, že se firma udrží na trhu 40 let, je 45 %.

16. ŘEŠENÍ

Jav A: Na modrej kocke padla štvorka.

Jav B: Súčet je rovných sedem.

Do Javu B by sme mohli zaradiť všetky nasledujúce dvojice: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

$P(A \cap B)$? Musíme zistiť, ktoré dvojice z B platí, že sú zároveň v A, alebo, že na modrej kocke padla 4. Hodnoty sú napísané v tvare: (Červená, Modrá). Z toho vyplýva, že jediné riešenie, ktoré nám vyhovuje je dvojica (3,4).

Z toho vyplýva: $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 1/6$