MATH AND STATS SUPPORT CENTRE

Řešení příkladů na procvičení náhodných veličin[1]

1. **ŘEŠENÍ**

   X... počet nedokonalých hnedých korálok
   Y... počet nedokonalých ružových korálok

   $X \sim Bi(10;0,14)$
   $Y \sim Bi(20;0,1)$

   a. P(nedokonalý náramok) = 1 - P(všetky korálky pekne zafarbené) = 1 – $P(X=0 \wedge Y=0)$ = (nezávislé veličiny) = 1 – $P(X=0) \cdot P(Y=0)$ = 1 - $\binom{10}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^{10} \cdot \binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} = 1 - 0{,}86^{10} \cdot 0{,}9^{20} = 0{,}9731$

   b. $P(X=4 \wedge Y=9)$ = (nezávislé veličiny) = $P(X=4) \cdot P(Y=9) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}14^4 \cdot 0{,}86^6 \cdot \binom{20}{9} \cdot 0{,}1^9 \cdot 0{,}9^{11} = 0{,}00000172$

---

2. **ŘEŠENÍ**

   X ... výhra
   y=?
   E(X)=10

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{20}{2}} & & x = 1000 \\ \frac{2 \cdot 18}{\binom{20}{2}} & pre & x = y \\ 0 & & inak \end{cases}$$

$$10 = 1000 \cdot \frac{1}{190} + y \cdot \frac{36}{190}$$

   y=25Kč

---

3. **ŘEŠENÍ**

   $P(X_1>t \text{ a } X_2>t) = P(X_1>t) * P(X_2>t) = (1-F_1(t)) * (1-F_2(t)) = (1-1-e^{-\lambda_1 t}) * (1-1-e^{-\lambda_2 t}) = e^{(-\lambda_1 - \lambda_2) * t}$
   =0,835=83,5%

---

[1] Příklady vytvořili studenti předmětu BPM_STA1

4. **ŘEŠENÍ**

   $X \in\{0,1,2,3.....\}$

   a. $X \sim Ge(4/32)$

   b. $P(X=5)=(28/32)^5 * 4/32=0{,}064$

---

5. **ŘEŠENÍ**

   $X \in\{0,1,2,3\}$

$$p(x)=\begin{cases} 8/27 & \text{pre } x=0 \\ 12/27 & \text{pre } x=1 \\ 6/27 & \text{pre } x=2 \\ 1/27 & \text{pre } x=3 \end{cases}$$

$$F(X)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & \text{pre } x\leq 0 \\ 8/27 & \text{pre } 0\leq x<1 \\ 20/27 & \text{pre } 1\leq x<2 \\ 26/27 & \text{pre } 2\leq x<3 \\ 1 & \text{pre } 3\leq x \end{cases}$$

$P(X=1 \vee X=2) \overset{\text{nesločitelne}}{=} P(X=1)+P(X=2)= 18/27$

---

6. **ŘEŠENÍ**

$$\int_2^3 (2x-b)dx = 1$$

$$[x^2-bx]_2^3 = 1$$

$$9 - 3b - 4 + 2b = 1$$

$$5 - b = 1$$

$$b = 4$$

$$E(X) = \int_2^3 x\cdot(2x-4)dx = [\tfrac{2}{3}x^3-2x^2]_2^3 = \frac{54}{3}-18-\frac{16}{3}+8=\frac{8}{3}$$

$$D(X) = E(X^2)\text{-}[E(X)]^2=\int_2^3 x^2\cdot(2x-4)dx-(\tfrac{8}{3})^2 = [\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{4}{3}x^3]_2^3-\frac{64}{9}=\frac{81}{2}-36-8+$$
$$+\frac{32}{3}-\frac{64}{9}=\frac{1}{18}$$

---

7. **ŘEŠENÍ**

$$f(x,y) =\begin{cases} b & \text{pro} 0\leq x\leq 3;\ 1\leq y\leq 4\text{-}x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$1 = \int_0^3\int_1^{4-x} b\,dy\ dx = b\int_0^3 3-x\,dx = b\,[3x-0{,}5x^2]_0^3 = b(9-4{,}5) = 4{,}5b$$

a. f(x,y) = $\begin{cases} 2/9 & \text{pro} 0\leq x \leq 3;\ 1\leq y\leq 4-x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

b. P(X+Y>2)= $1-\int_0^1\int_1^{2-x} \frac{2}{9}dy\ dx = 1-\frac{2}{9}\int_0^1 1-x\,dx = 1-\frac{2}{9}\ [x-0{,}5x^2]_0^1 = 1-\frac{2}{9}(1-0{,}5)=\frac{8}{9}$

c. f(x)= $\int_1^{4-x} \frac{2}{9}\,dy = \frac{2}{9}(3-x)$ pro 0≤x≤3, 0 jinak

f(y)= $\int_0^{4-y} \frac{2}{9}\,dy = \frac{2}{9}(4-y)$ pro 1≤y≤4, 0 jinak

$\frac{2}{9}(3-x)\cdot\frac{2}{9}(4-y)\neq\frac{2}{9}$ => nejsou stochasticky nezávislé

---

8. **ŘEŠENÍ**

$300\cdot 70\cdot\frac{1}{8}=2625$ => bude najviac 2625 náramkov nedokonalých

X_i … počet nedokonalých náramkov v i-tom balíčku

X … počet nedokonalých náramkov v objednávke

$E(X_i)=10$

$D(X_i)=49$

$E(X)=E(X_1+X_2+\ldots+X_{300})=\sum_{i=1}^{300}E(X_i)=300\cdot 10=3000$

$D(X)=D(X_1+X_2+\ldots+X_{300})=$ (nezávislé veličiny) $=\sum_{i=1}^{300}D(X_i)=300\cdot 49=14700$

$P(X\leq 2625)=P(\frac{X-3000}{\sqrt{14700}}\leq\frac{2625-3000}{\sqrt{14700}})=\Phi\ (\frac{-375}{\sqrt{14700}})=1-\Phi\ (\frac{375}{\sqrt{14700}})=1-0{,}999=0{,}001=0{,}1\%$

---

9. **ŘEŠENÍ**

X ………………………. počet žen ve výběru

Y ………………………. počet bezdětných žen ve výběru

X ∈{1,2,3}, Y ∈{0,1,2}

Jedná se o diskrétní veličinu, jelikož se zde zastavuji po jednotlivých bodech, nikoli po intervalech.

m(Ω)= $\binom{7}{3}=35$

p(1,0)= $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{35}=\frac{3}{35}$, p(2,0)= $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{35}=\frac{6}{35}$, p(3,0)= $\frac{\binom{3}{3}}{35}=\frac{1}{35}$

p(1,1)= $\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{35}=\frac{2}{35}$, p(2,1)= $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{35}=\frac{12}{35}$, p(3,1)= $\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{35}=\frac{6}{35}$

p(1,2)=0, p(2,2)= $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{35}=\frac{2}{35}$, p(3,2)= $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{35}=\frac{3}{35}$

x $p(x,y)$ y	0	1	2	$p_x(x)$
1	3/35	2/35	0	1/7
2	6/35	12/35	2/35	4/7
3	1/35	6/35	3/35	2/7
$p_y(y)$	2/7	4/7	1/7	1